KOLOKWIUM LOGICZNE
WROCŁAW 2008

O niezupełnych w sensie Kripkego logikach w $NEXT(KTB)$

Zofia Kostrzycka
Politechnika Opolska

Logika Brouwera $\mathbf{KTB}$

Aksjomaty KRZ oraz

$$
\begin{aligned}
K &:= \Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q) \\
T &:= \Box p \to p \\
B &:= p \to \Box\Diamond p
\end{aligned}
$$

oraz reguły (MP), (Sub) i (RG).

Semantyka relacyjna dla $\mathbf{KTB}$
Struktury Kripkego

Definicja 1. *Strukturą Kripkego nazywamy parę* $\mathfrak{F} = \langle W, R \rangle$ *składającą się z niepustego zbioru* W *i relacji* R *na* W. *W przypadku logiki* $\mathbf{KTB}$, R *jest zwrotna i symetryczna.*

Elementy W *nazywamy punktami lub światami, a relację R rozumiemy jako relację dostępności:* xRy *znaczy: 'y jest dostępne z x'.*

Wartościowanie w $\mathfrak{F}$ jest funkcją $V : Var \to W$ i rozszerza się do homomorfizmu.

Definiujemy dla $x \in W$:

$$
\begin{array}{rcl}
x \models p & \text{wtw} & x \in V(p) \\
x \models \alpha \wedge \beta & \text{wtw} & x \models \alpha \quad \text{i} \quad x \models \beta \\
x \models \alpha \vee \beta & \text{wtw} & x \models \alpha \quad \text{lub} \quad x \models \beta \\
x \models \alpha \to \beta & \text{wtw} & x \not\models \alpha \quad \text{lub} \quad x \models \beta \\
x \models \neg\alpha & \text{wtw} & x \not\models \alpha \\
x \models \Box\alpha & \text{wtw} & \text{dla każdego } y \in W \quad \text{if} \quad xRy \quad \text{then} \quad y \models \alpha
\end{array}
$$

Formuła α jest tautologią logiki KTB, gdy jest prawdziwa we wszystkich zwrotnych i symetrycznych modelach Kripkego.

Rodzina rozszerzeń logiki KTB

$\mathbf{T_n} = \mathbf{KTB} \oplus (4_n)$, gdzie

$$(4_n) \qquad \Box^n p \rightarrow \Box^{n+1} p$$

$$(tran_n) \quad \forall_{x,y} \text{ (jeśli } xR^{n+1}y \text{ to } xR^n y)$$

gdzie relacja R^n - dostępności w n-krokach, jest zdefiniowana indukcyjnie w następujący sposób:

$$\begin{array}{rcl} xR^0y & \text{wtw} & x = y \\ xR^{n+1}y & \text{wtw} & \exists_z\, (xR^n z \ \wedge\ zRy) \end{array}$$

$$\mathbf{KTB} \subset ... \subset \mathbf{T_{n+1}} \subset \mathbf{T_n} \subset ... \subset \mathbf{T_2} \subset \mathbf{T_1} = \mathbf{S5}.$$

Definicja 2. *Logika* $\mathbf{L}$ *jest zupełna w sensie Kripkego, jeśli istnieje klasa* $\mathcal{C}$ *struktur Kripkego, taka że:*

1. *dla każdej formuły* $\varphi \in \mathbf{L}$ *i dla każdej struktury* $\mathfrak{F} \in \mathcal{C}$ *zachodzi* $\mathfrak{F} \models \varphi$*.*

2. *dla każdej formuły* $\psi \notin \mathbf{L}$*, istnieje struktura Kripkego* $\mathfrak{G} \in \mathcal{C}$*, taka że* $\mathfrak{G} \not\models \psi$*.*

Fakt 3. *Logiki* $\mathbf{T_n}$ *są zupełne w sensie Kripkego.*

Problem

Miyazaki [1] zdefiniował jedną niezupełną w sensie Kripkego logikę w rodzinie $NEXT(\mathbf{T_2})$ i kontinuum niezupełnych w sensie Kripkego logik w rodzinie $NEXT(\mathbf{T_5})$.

Pytanie: Czy istnieje kontinuum niezupełnych w sensie Kripkego logik w rodzinie $NEXT(\mathbf{T_2})$?

[1] Y. Miyazaki, Kripke incomplete logics containing KTB, Studia Logica, 85, (2007), 311-326.

[2] Kostrzycka Z, On the existence of a continuum of logics in $NEXT(KTB \oplus \Box^2 p \to \Box^3 p)$, Bulletin of the Section of Logic, Vol.36/1, (2007), 1-7.

Definicja 4. *Logika modalna L jest zwarta (w stosunku do struktur Kripkego) gdy każda formuła nieseparowalna od L za pomocą struktur Kripkego, nie jest separowalna również od skończenie aksjomatyzowalnej podlogiki L.*

Logiki zupełne w sensie Kripkego są zwarte lecz nie na odwrót.

Naszym celem jest zdefiniowanie nieprzeliczalnej rodziny niezwartych (stąd niezupełnych w sensie Kripkego) rozszerzeń logiki $\mathbf{T_2}$.

Cel

Zdefiniować nieprzeliczalną rodzinę logik L_X i formułę φ taką że, dla każdej skończenie aksjomatyzowalnej podlogiki L_1, $L_1 \subset L_X$ zachodzi:

1. Istnieje struktura Kripkego $\mathfrak{F}$ taka, że $\mathfrak{F} \models L_1$ i $\mathfrak{F} \not\models \varphi$,
2. Jeśli istnieje struktura Kripkego $\mathfrak{F}$ taka, że $\mathfrak{F} \models L_X$, to $\mathfrak{F} \models \varphi$.

Formuły nierównoważne zdefiniowane za pomocą jednej zmiennej

Niech $\alpha := p \wedge \neg\Diamond\Box p$.

Definicja 5.

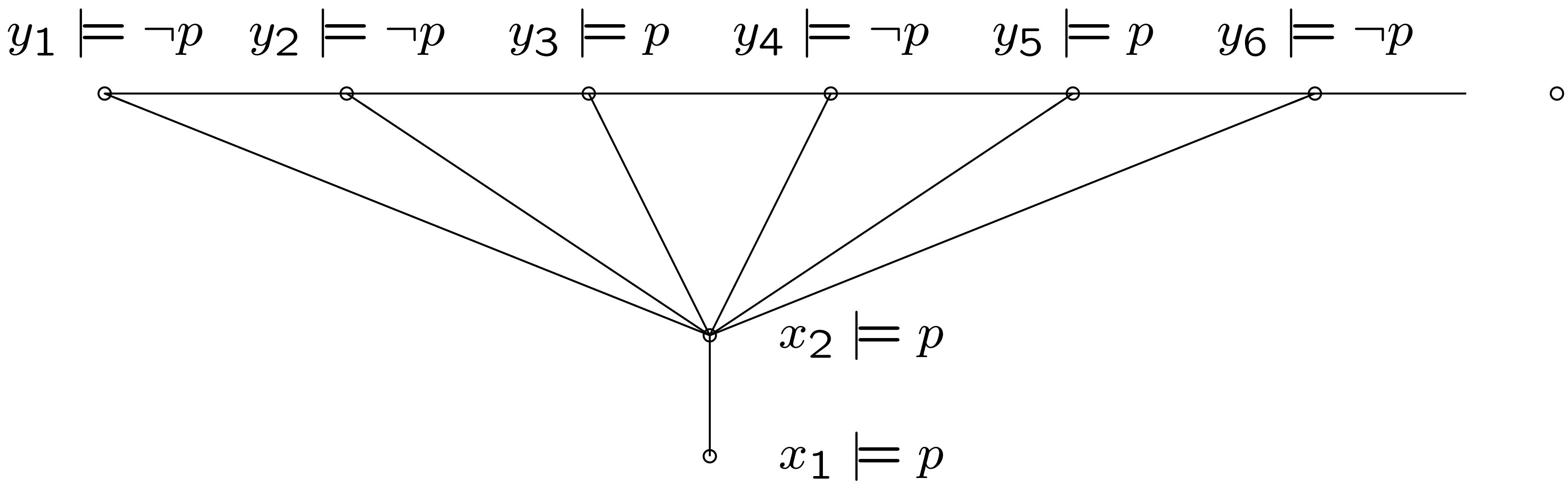
$$A_1 := \neg p \wedge \Box\neg\alpha$$
$$A_2 := \neg p \wedge \neg A_1 \wedge \Diamond A_1$$
$$A_3 := \alpha \wedge \Diamond A_2 \wedge \neg\Diamond A_1$$

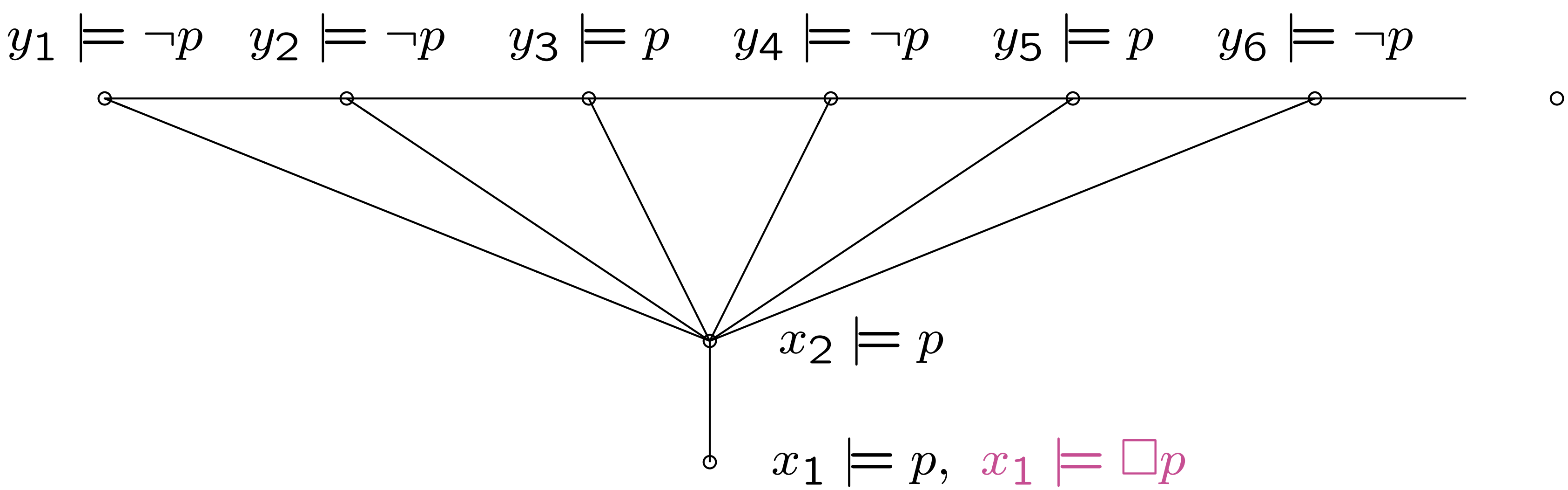
Dla $n \geq 2$:

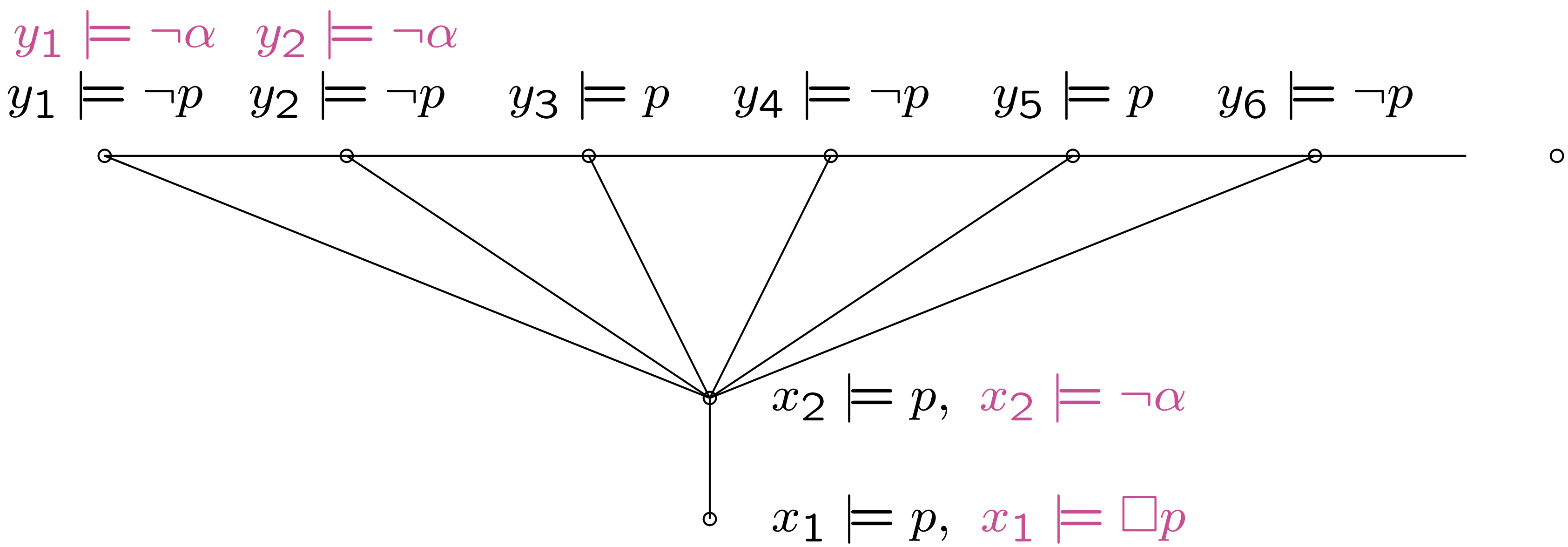
$$\begin{aligned} A_{2n} &:= \neg p \wedge \Diamond A_{2n-1} \wedge \neg\Diamond A_{2n-2} \\ A_{2n+1} &:= \alpha \wedge \Diamond A_{2n} \wedge \neg\Diamond A_{2n-1} \end{aligned}$$

Twierdzenie 6. *Formuły $\{A_i\}$, $i \geq 1$ są nierównoważne w logice $\mathbf{T_2}$.*

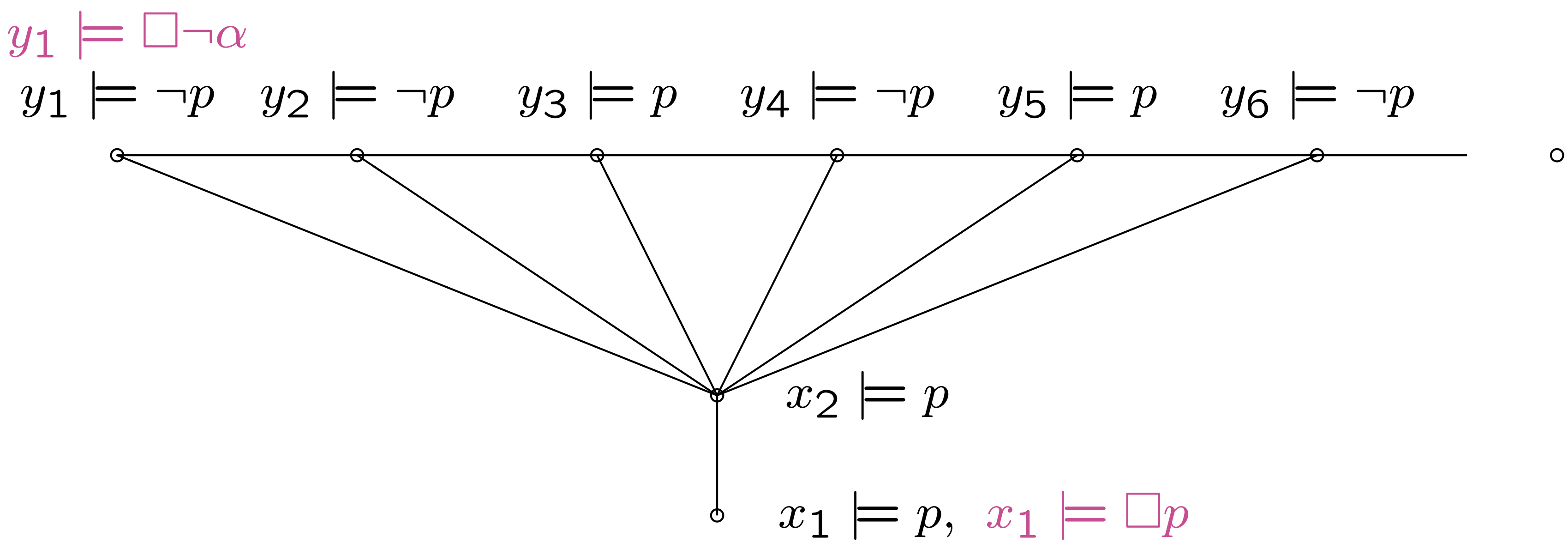
Dowód: Rozważmy następujący model $\mathfrak{M} = \langle W, R, V \rangle$:


$y_1 \models \neg p$
$y_2 \models \neg p$
$y_3 \models p$
$y_4 \models \neg p$
$y_5 \models p$
$y_6 \models \neg p$
$x_2 \models p$
$x_1 \models p$

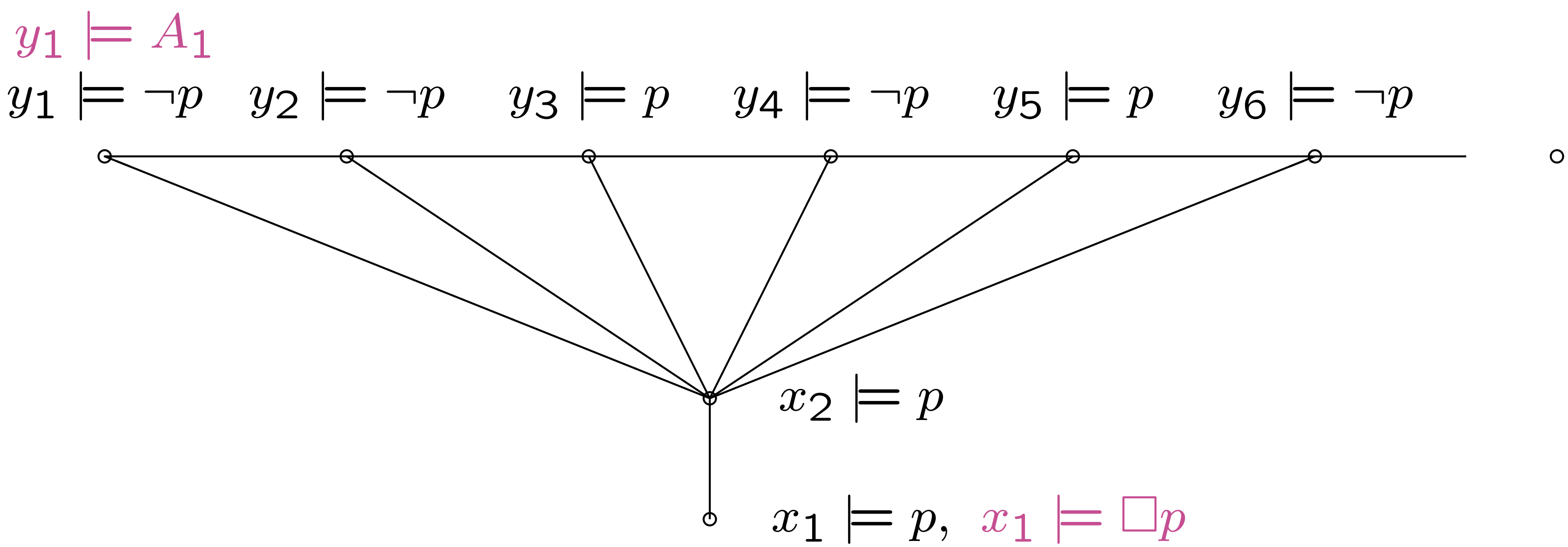

$y_1 \models \neg p$
$y_2 \models \neg p$
$y_3 \models p$
$y_4 \models \neg p$
$y_5 \models p$
$y_6 \models \neg p$
$x_2 \models p$
$x_1 \models p$, $x_1 \models \Box p$

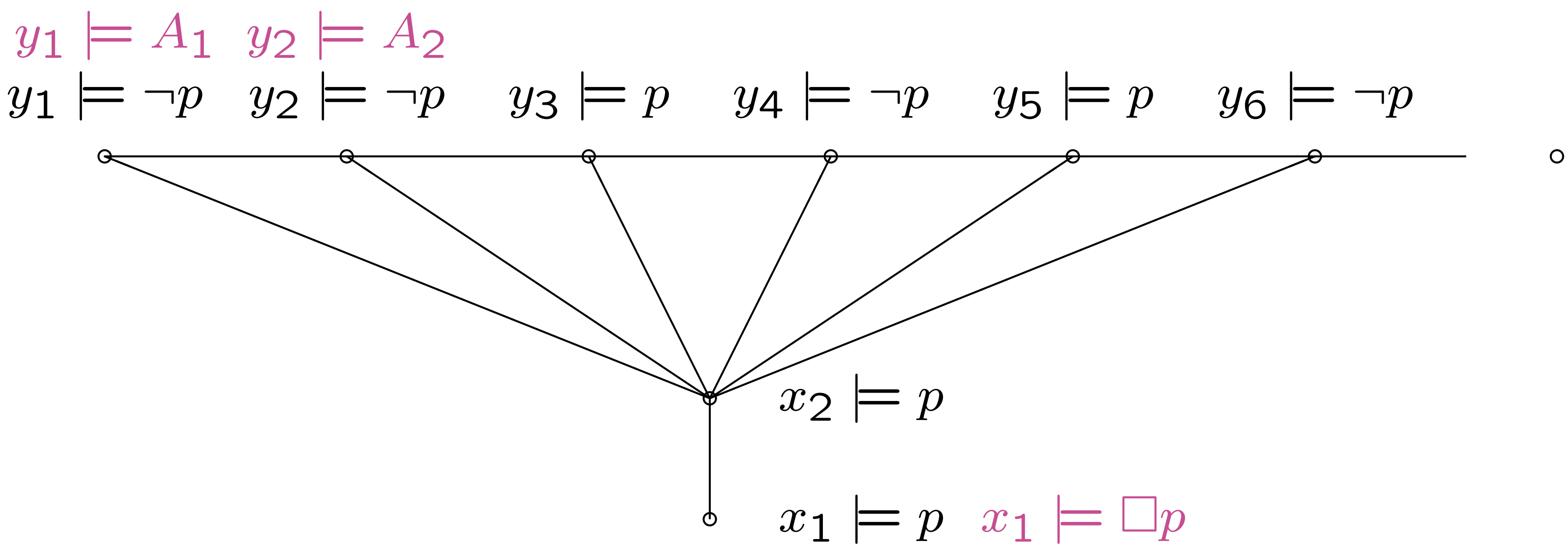


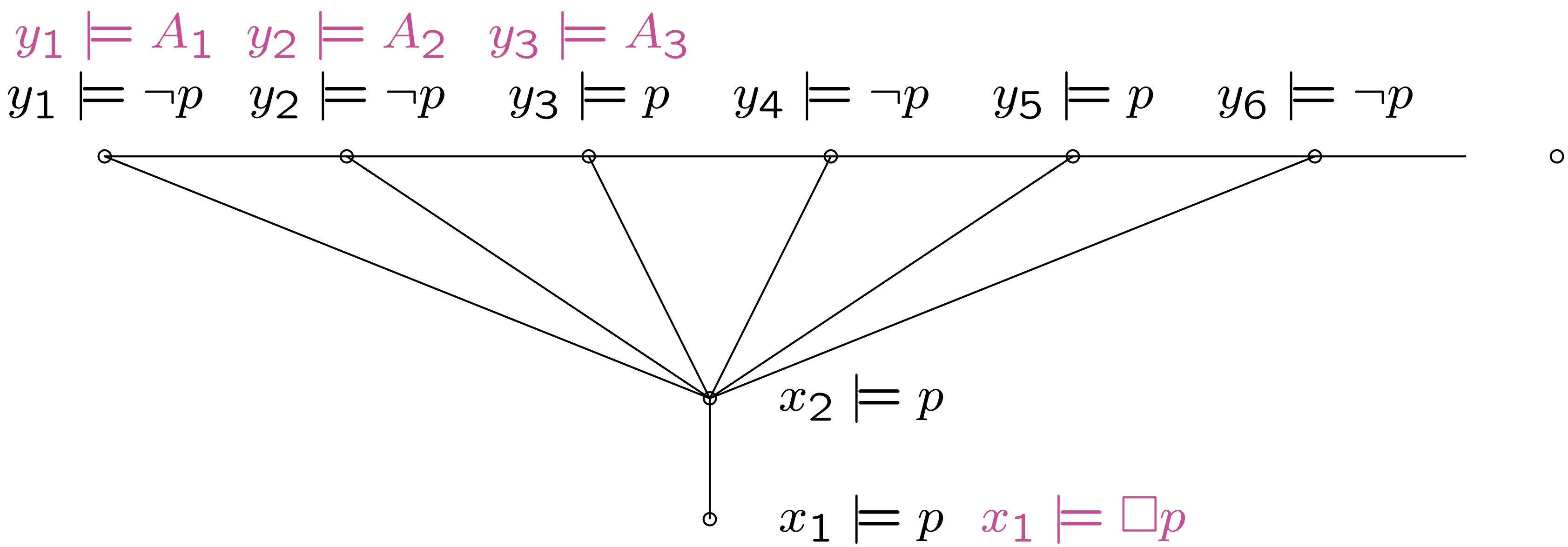
gdzie $\alpha := p \wedge \neg\Diamond\Box p$.

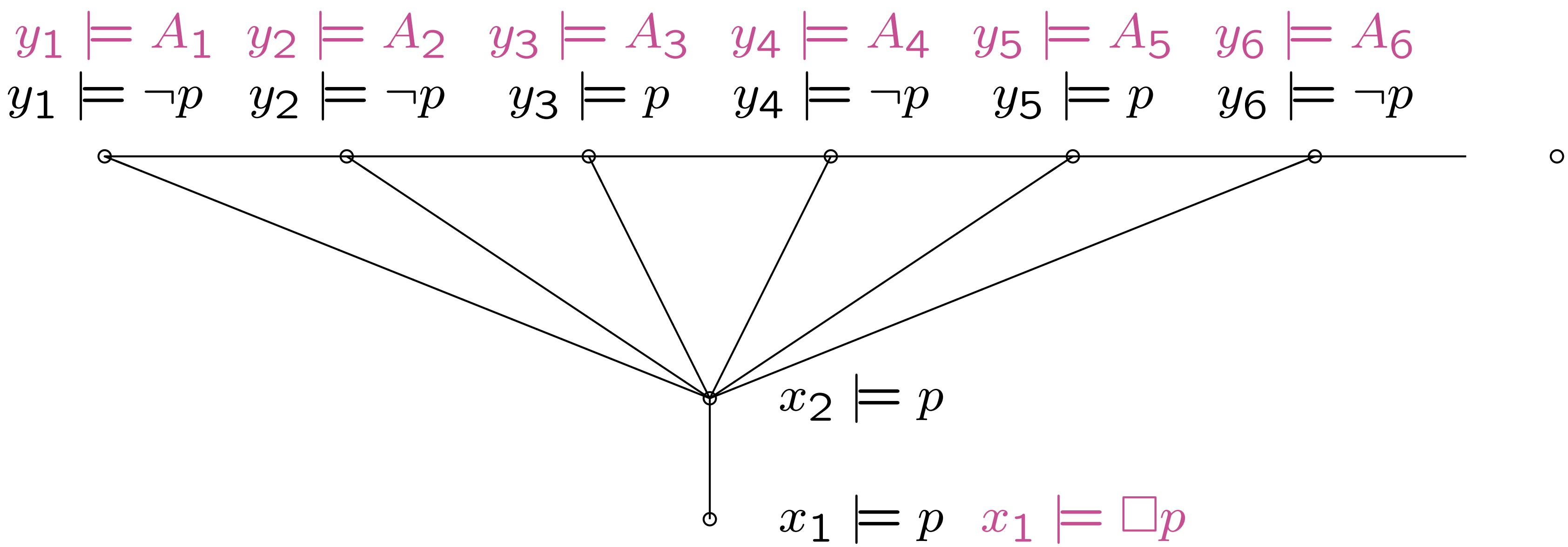


$y_1 \models \Box\neg\alpha$
$y_1 \models \neg p$
$y_2 \models \neg p$
$y_3 \models p$
$y_4 \models \neg p$
$y_5 \models p$
$y_6 \models \neg p$
$x_2 \models p$
$x_1 \models p$, $x_1 \models \Box p$


$y_1 \models A_1$
$y_1 \models \neg p$
$y_2 \models \neg p$
$y_3 \models p$
$y_4 \models \neg p$
$y_5 \models p$
$y_6 \models \neg p$
$x_2 \models p$
$x_1 \models p$, $x_1 \models \Box p$


$y_1 \models A_1$ $y_2 \models A_2$
$y_1 \models \neg p$ $y_2 \models \neg p$ $y_3 \models p$ $y_4 \models \neg p$ $y_5 \models p$ $y_6 \models \neg p$
$x_2 \models p$
$x_1 \models p$ $x_1 \models \Box p$


$y_1 \models A_1$
$y_2 \models A_2$
$y_3 \models A_3$
$y_1 \models \neg p$
$y_2 \models \neg p$
$y_3 \models p$
$y_4 \models \neg p$
$y_5 \models p$
$y_6 \models \neg p$
$x_2 \models p$
$x_1 \models p$
$x_1 \models \Box p$


$y_1 \models A_1$
$y_2 \models A_2$
$y_3 \models A_3$
$y_4 \models A_4$
$y_5 \models A_5$
$y_6 \models A_6$
$y_1 \models \neg p$
$y_2 \models \neg p$
$y_3 \models p$
$y_4 \models \neg p$
$y_5 \models p$
$y_6 \models \neg p$
$x_2 \models p$
$x_1 \models p$
$x_1 \models \Box p$

Dla dowolnych $i \geq 1$ i $x \in W$ zachodzi:

$$x \models A_i \quad \text{wtw} \quad x = y_i$$

Twierdzenie 7. *W logice $\mathbf{T_2}$ istnieje nieskończenie wiele nierównoważnych formuł zdefiniowanych za pomocą jednej zmiennej.*

[3] Kostrzycka Z., *On formulas in one variable in* $NEXT(KTB)$, Bulletin of the Section of Logic, Vol.35:2/3, (2006), 119-131.

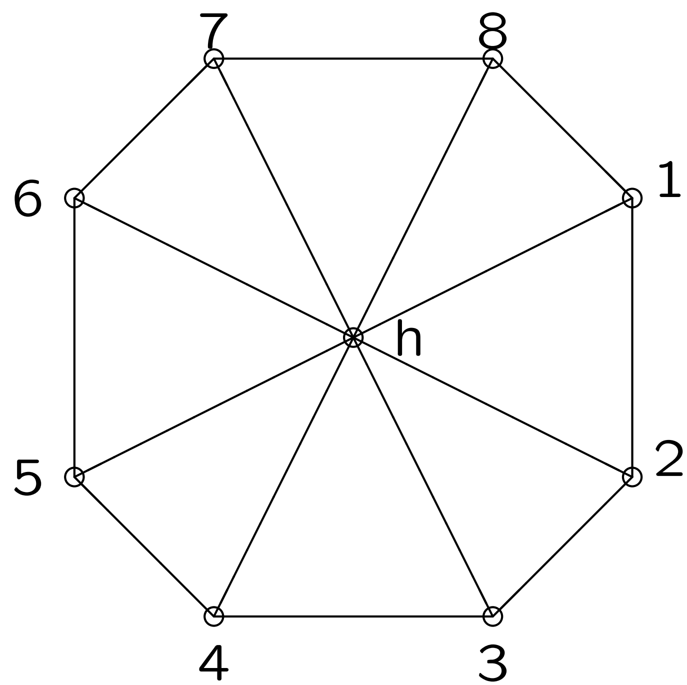
Struktury w kształcie koła

Definicja 8. *Niech $n \in \omega$ i $n \geq 5$. Strukturą Kripkego w kształcie koła nazywamy parę $\mathfrak{W}_n = \langle W, R \rangle$ gdzie*

$W = rim(W) \cup h$ *i* $rim(W) := \{1, 2, ..., n\}$ *i* $h \notin rim(W)$.

$R := \{(x, y) \in (rim(W))^2 : |x - y| \leq 1 (mod\,(n - 1))\} \cup \{(h, h)\} \cup \{(h, x), (x, h) : x \in rim(W)\}$.

Diagram $\mathfrak{W}_8$



Niech:

$$\begin{aligned} \beta &:= \neg\Box p \wedge \Diamond\Box p \\ \gamma &:= \beta \wedge \Diamond A_1 \wedge \neg\Diamond A_2 \wedge \neg\Diamond A_3 \\ \varepsilon &:= \beta \wedge \neg\Diamond A_1 \wedge \neg\Diamond A_2 \end{aligned}$$

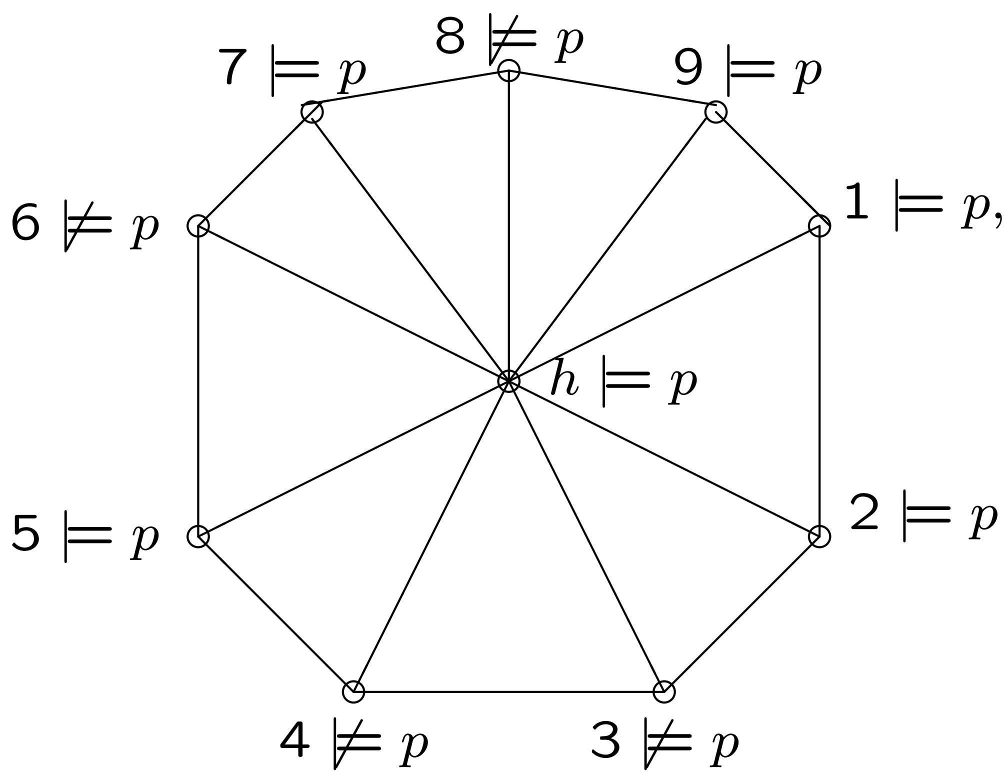
$$\begin{aligned} C_k &:= \Box^2[A_{k-1} \to \Diamond A_k], \quad \text{for} \quad k > 2 \\ D_k &:= \Box^2[(A_k \wedge \neg\Diamond A_{k+1}) \to \Diamond\varepsilon], \\ E &:= \Box^2(\Box p \to \Diamond\gamma) \end{aligned}$$

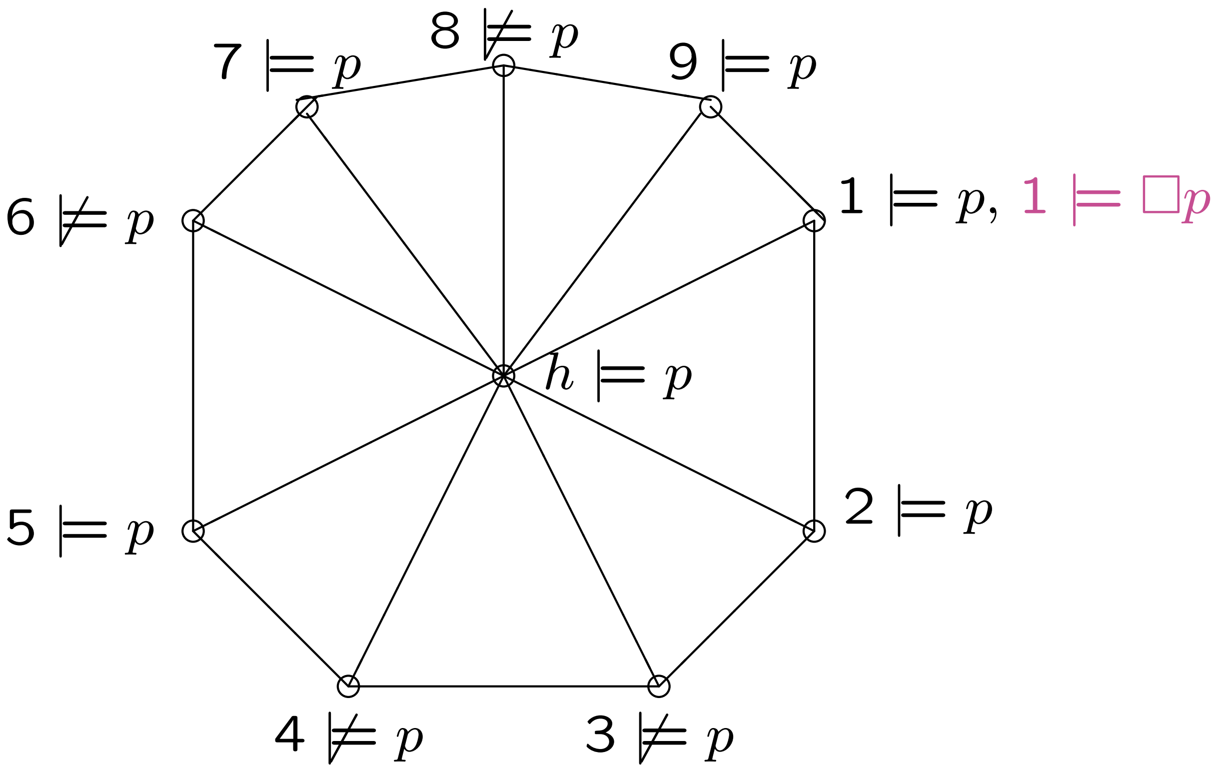
$$G_k := (\Box p \wedge \bigwedge_{i=2}^{k-1} C_i \wedge D_{k-1} \wedge E) \to \Diamond^2 A_k.$$

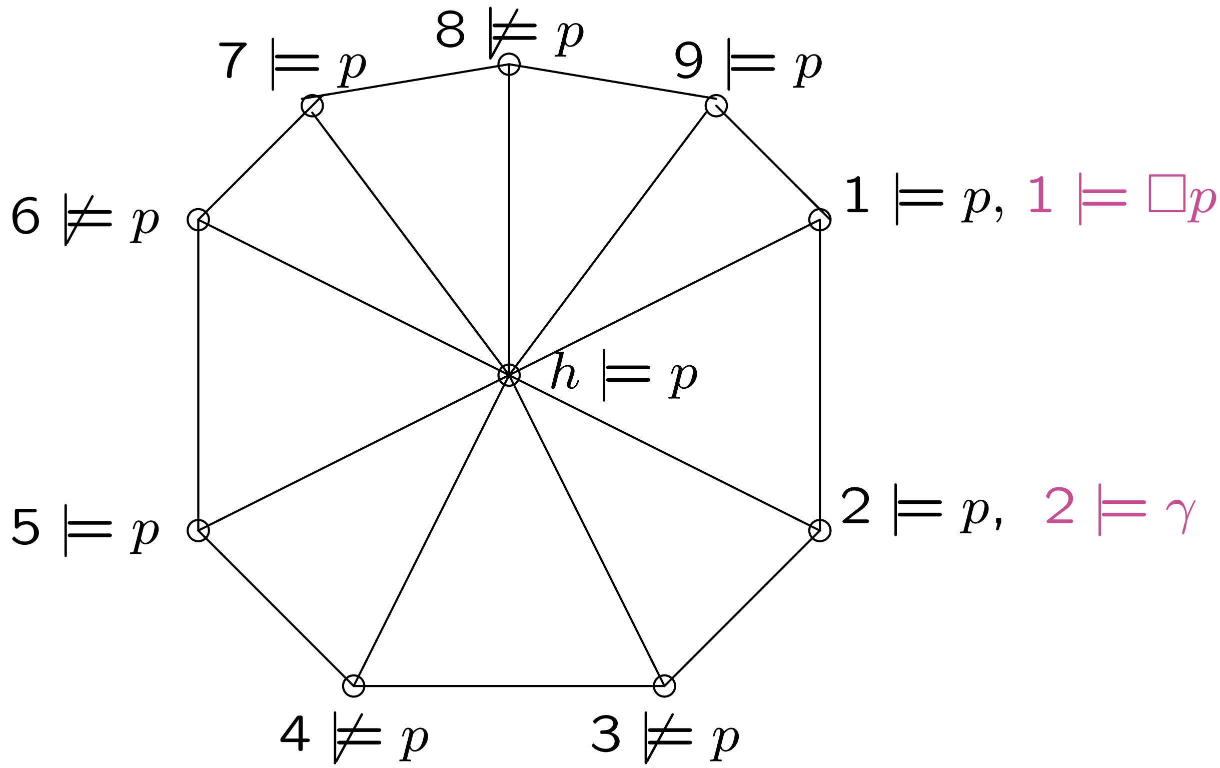
Lemat 9. *Niech $k \geq 5$ i k- liczba nieparzysta.*

$\mathfrak{W}_i \not\models G_k$ wtw i jest podzielne przez $k+2$.

Przykład: for $k = 7$, $i = 9$.

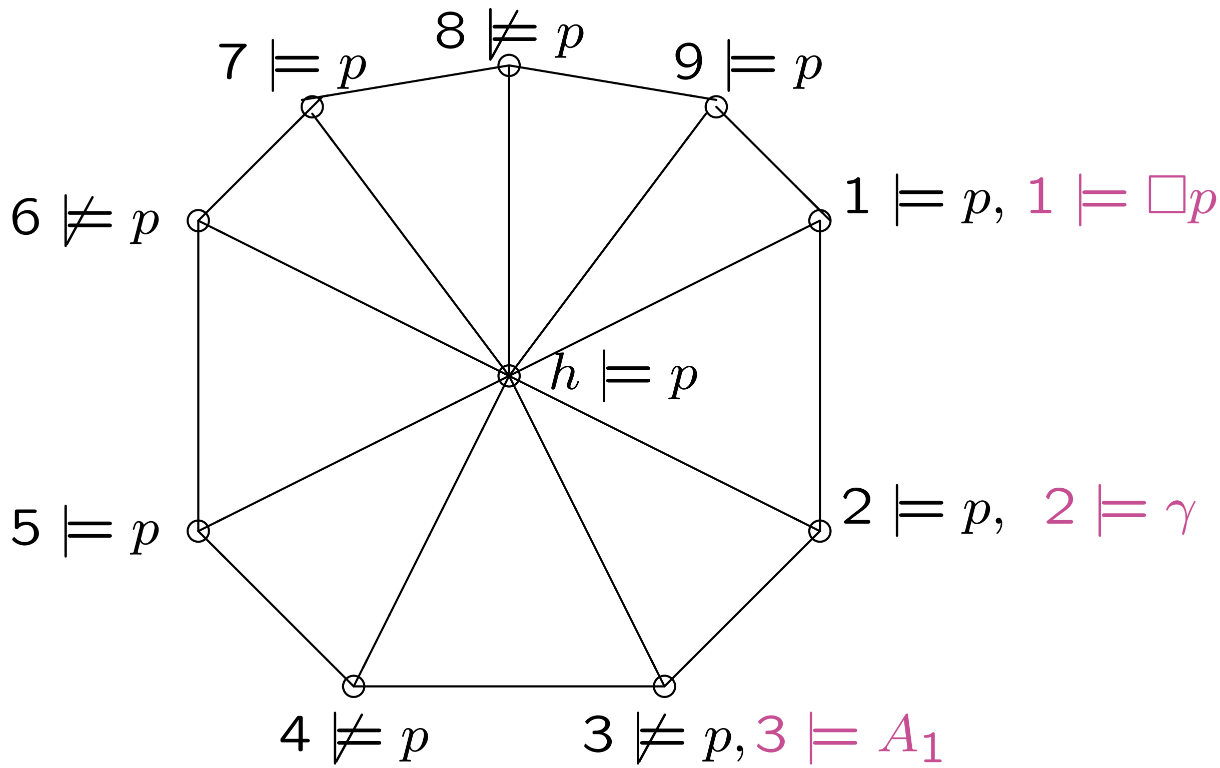



$8 \not\models p$
$7 \models p$
$9 \models p$
$6 \not\models p$
$1 \models p$, $1 \models \Box p$
$h \models p$
$5 \models p$
$2 \models p$
$4 \not\models p$
$3 \not\models p$

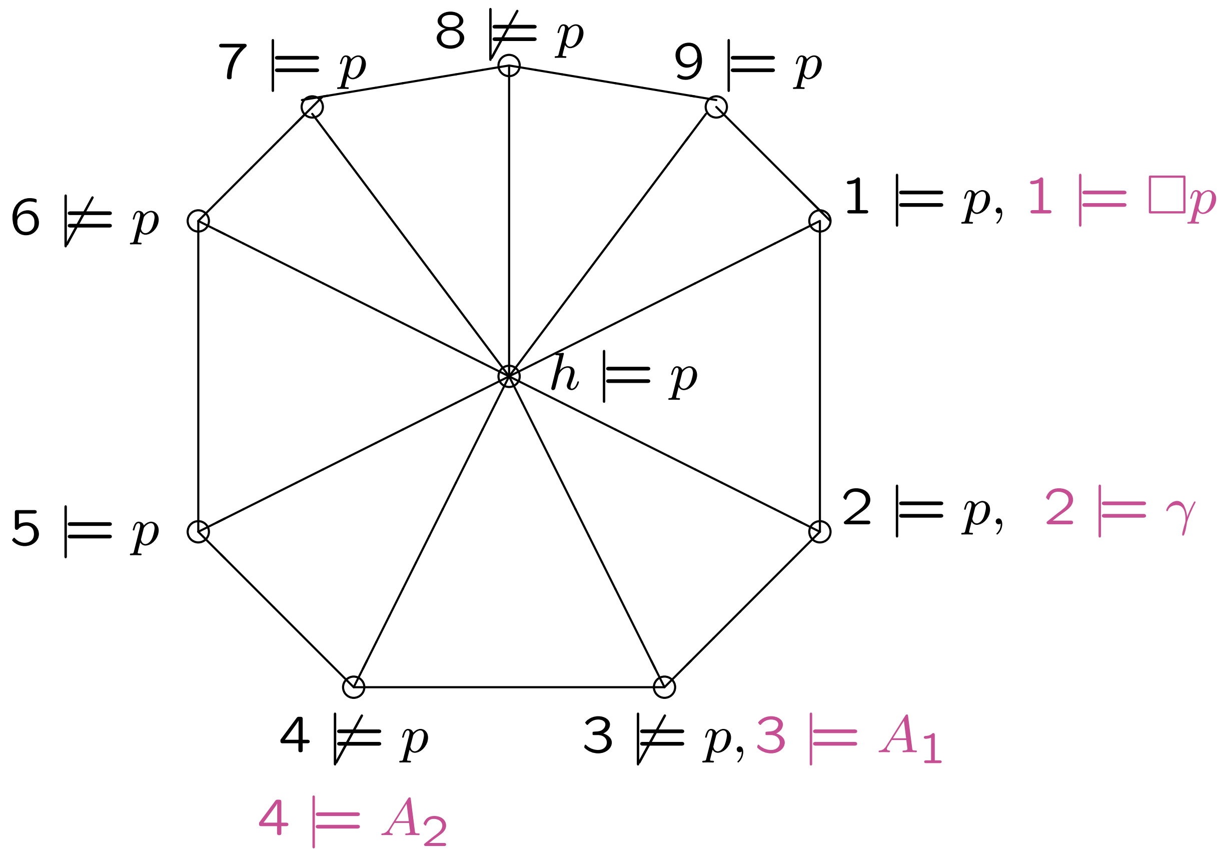


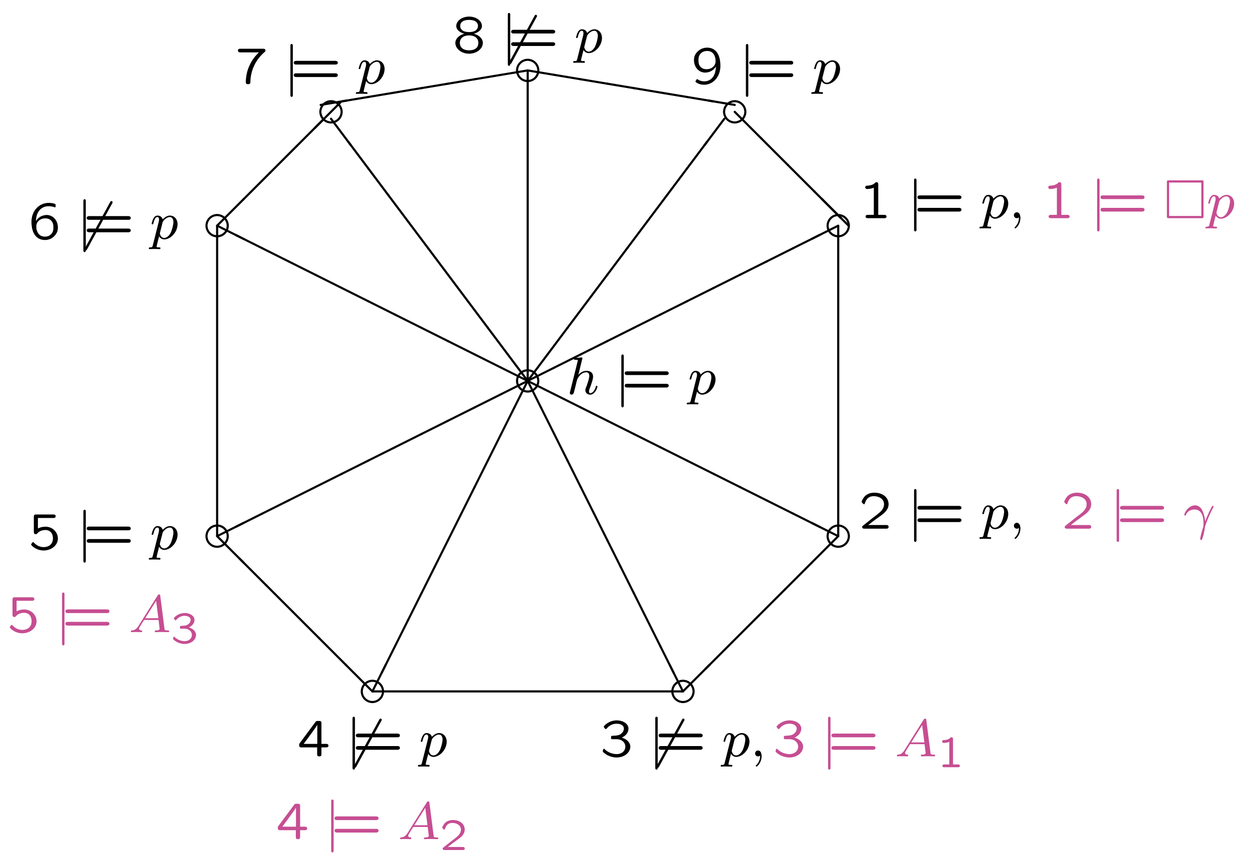
gdzie $\gamma = \beta \wedge \Diamond A_1 \wedge \neg\Diamond A_2$

$\beta = \neg\Box p \wedge \Diamond\Box p$

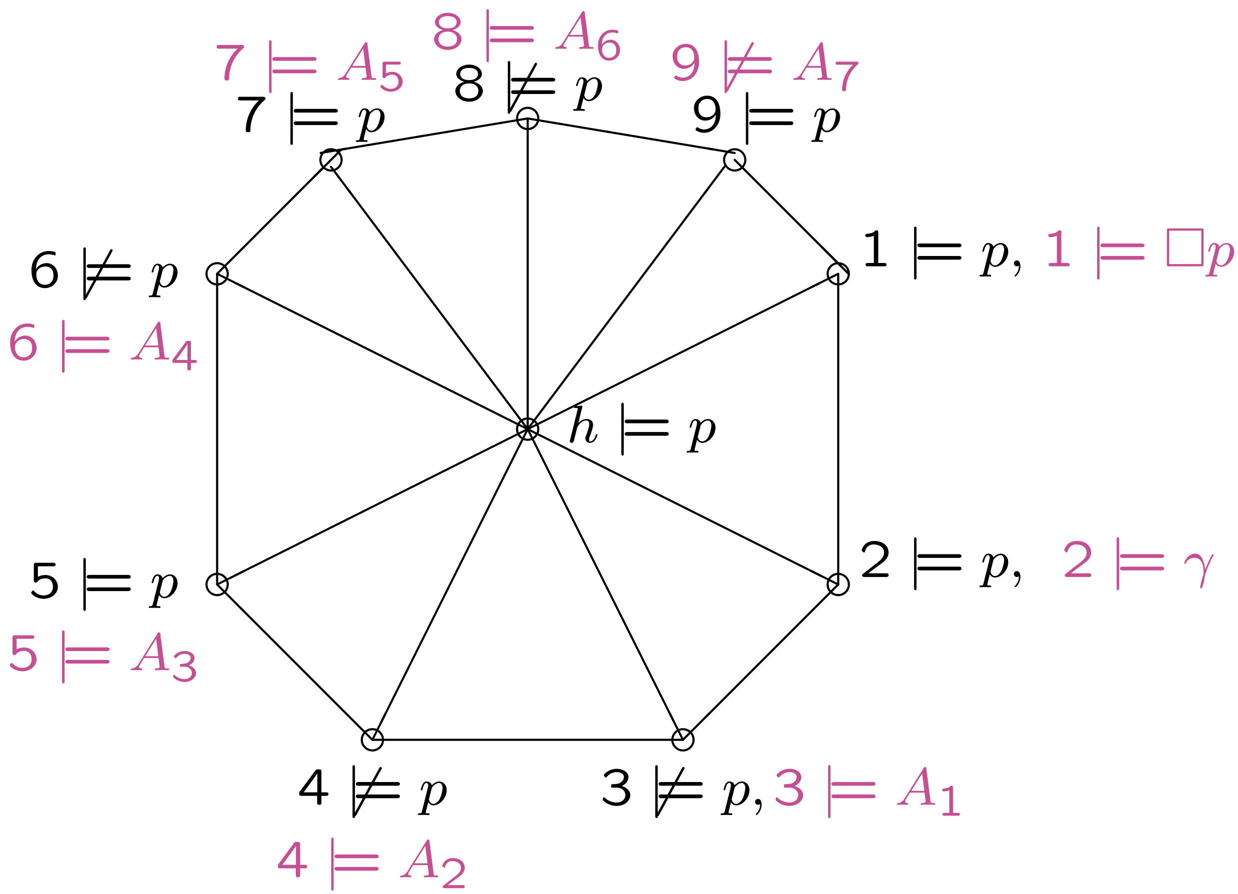


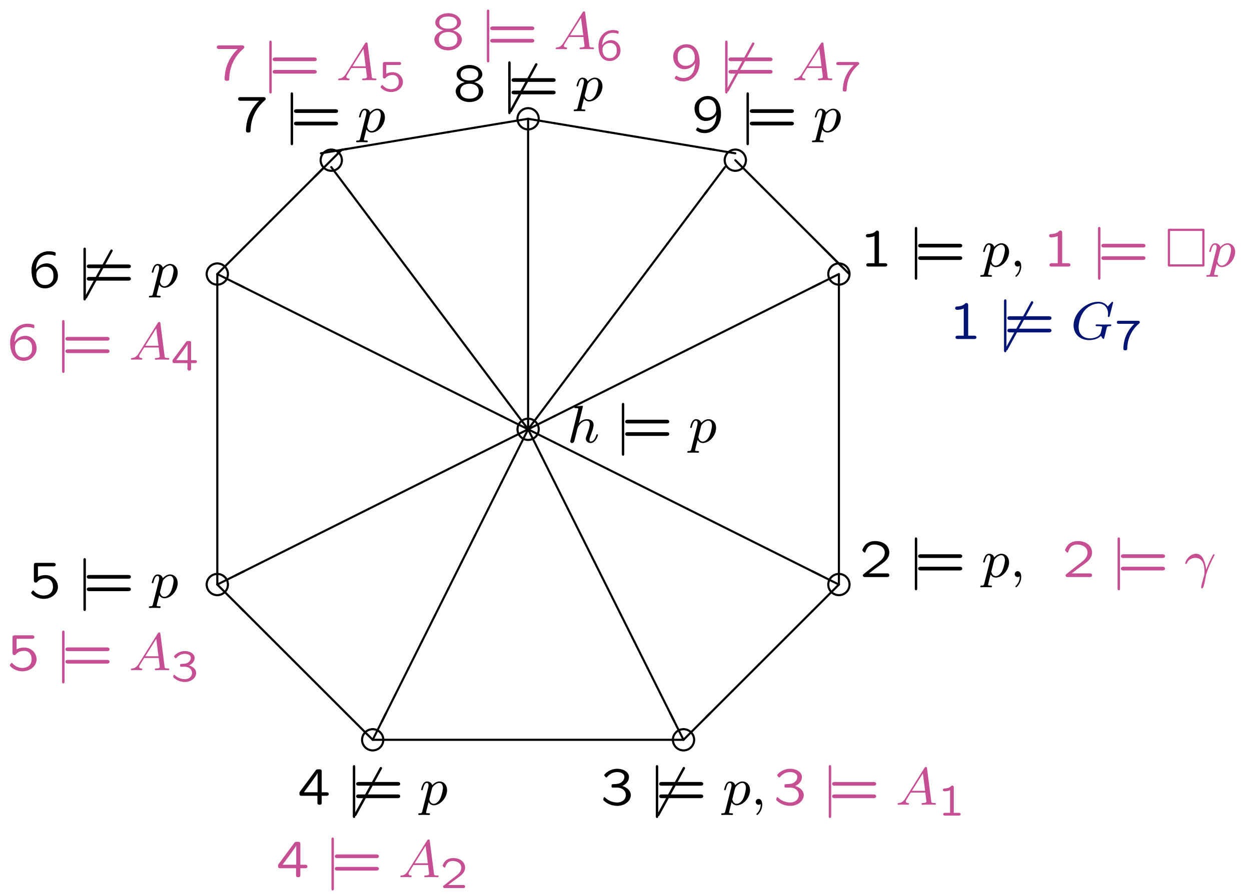
$8 \not\models p$
$7 \models p$
$9 \models p$
$1 \models p$, $1 \models \Box p$
$6 \not\models p$
$h \models p$
$5 \models p$
$2 \models p$, $2 \models \gamma$
$4 \not\models p$
$3 \not\models p$, $3 \models A_1$


$8 \not\models p$
$7 \models p$
$9 \models p$
$6 \not\models p$
$1 \models p$, $1 \models \Box p$
$h \models p$
$5 \models p$
$2 \models p$, $2 \models \gamma$
$4 \not\models p$
$3 \not\models p$, $3 \models A_1$
$4 \models A_2$



$8 \not\models p$
$7 \models p$
$9 \models p$
$6 \not\models p$
$1 \models p,\ 1 \models \Box p$
$h \models p$
$5 \models p$
$2 \models p,\ 2 \models \gamma$
$5 \models A_3$
$4 \not\models p$
$3 \not\models p, 3 \models A_1$
$4 \models A_2$


$8 \models A_6$
$7 \models A_5$
$9 \not\models A_7$
$8 \not\models p$
$7 \models p$
$9 \models p$
$6 \not\models p$
$1 \models p$, $1 \models \Box p$
$6 \models A_4$
$h \models p$
$5 \models p$
$2 \models p$, $2 \models \gamma$
$5 \models A_3$
$4 \not\models p$
$3 \not\models p$, $3 \models A_1$
$4 \models A_2$



gdzie $G_7 = (\Box p \wedge \bigwedge_{i=2}^{6} C_i \wedge D_6 \wedge E) \to \Diamond^2 A_7$.

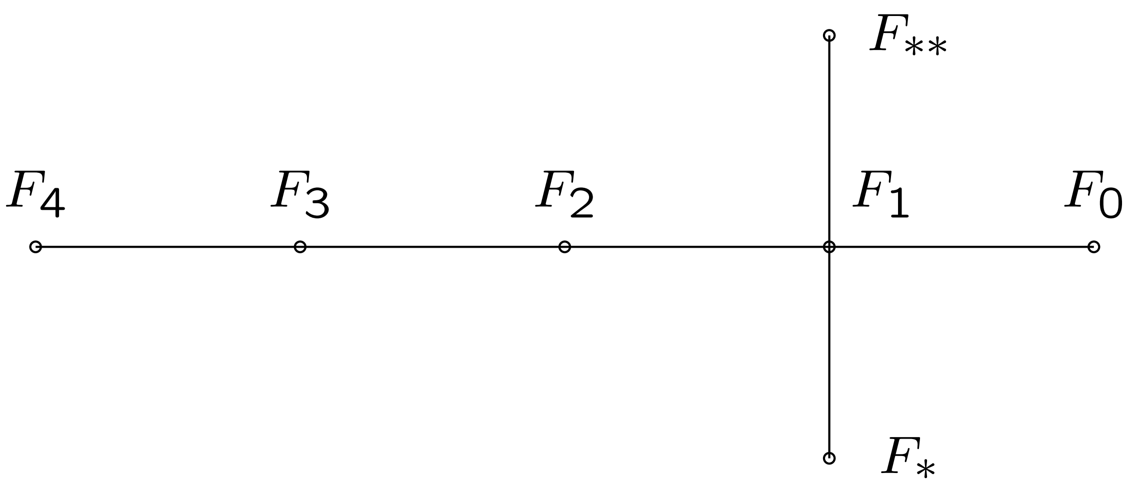
Nieprzeliczalna rodzina logik L_X

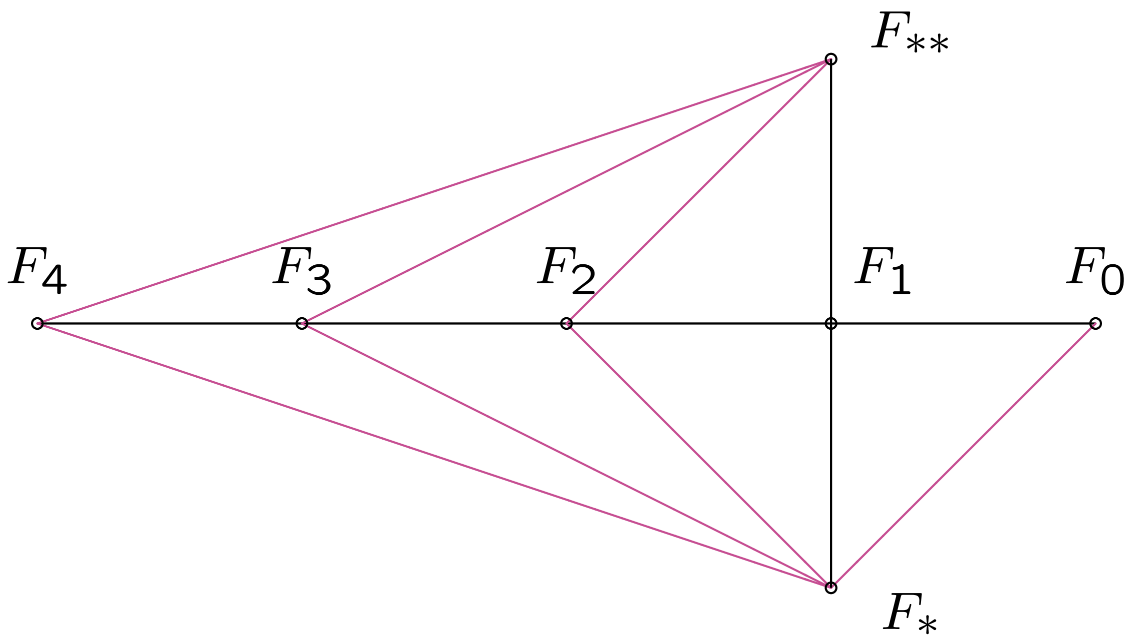
Fromuły wyłączające:

$$
\begin{aligned}
F_* &:= p_* \wedge \neg p_0 \wedge \neg p_1 \wedge \neg p_2 \wedge \neg p_3 \wedge \neg p_4 \\
F_{**} &:= \neg p_* \wedge \neg p_0 \wedge \neg p_1 \wedge \neg p_2 \wedge \neg p_3 \wedge \neg p_4 \\
F_0 &:= \neg p_* \wedge p_0 \wedge \neg p_1 \wedge \neg p_2 \wedge \neg p_3 \wedge \neg p_4 \\
F_1 &:= \neg p_* \wedge \neg p_0 \wedge p_1 \wedge \neg p_2 \wedge \neg p_3 \wedge \neg p_4 \\
F_2 &:= \neg p_* \wedge \neg p_0 \wedge \neg p_1 \wedge p_2 \wedge \neg p_3 \wedge \neg p_4 \\
F_3 &:= \neg p_* \wedge \neg p_0 \wedge \neg p_1 \wedge \neg p_2 \wedge p_3 \wedge \neg p_4 \\
F_4 &:= \neg p_* \wedge \neg p_0 \wedge \neg p_1 \wedge \neg p_2 \wedge \neg p_3 \wedge p_4
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Q \quad := \quad & \{F_1 \wedge \Diamond F_* \wedge \Diamond(F_{**} \wedge \neg\Diamond F_0) \wedge \Diamond(F_0 \wedge \neg\Diamond F_3 \wedge \neg\Diamond F_4) \wedge \\
& \wedge\Diamond(F_2 \wedge \Diamond(F_3 \wedge \Diamond F_4) \wedge \neg\Diamond F_0 \wedge \neg\Diamond F_4) \wedge \neg\Diamond F_3 \wedge \neg\Diamond F_4\} \to \\
& \to \{\Diamond(F_* \wedge \Diamond F_0 \wedge \Diamond(F_2 \wedge \Diamond(F_{**} \wedge \Diamond F_3 \wedge \Diamond F_4)) \wedge \Diamond F_3 \wedge \Diamond F_4)\},
\end{aligned}
$$

Rola formuły Q:



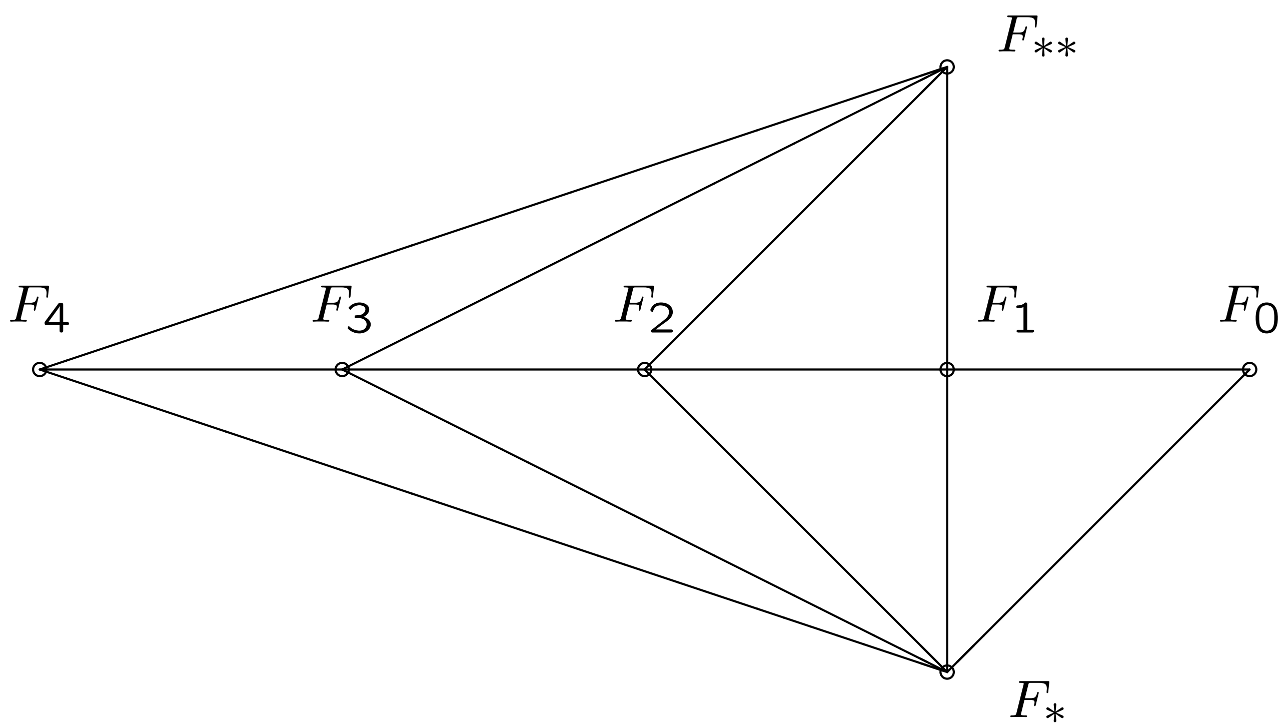

F_{**}
F_4
F_3
F_2
F_1
F_0
F_*

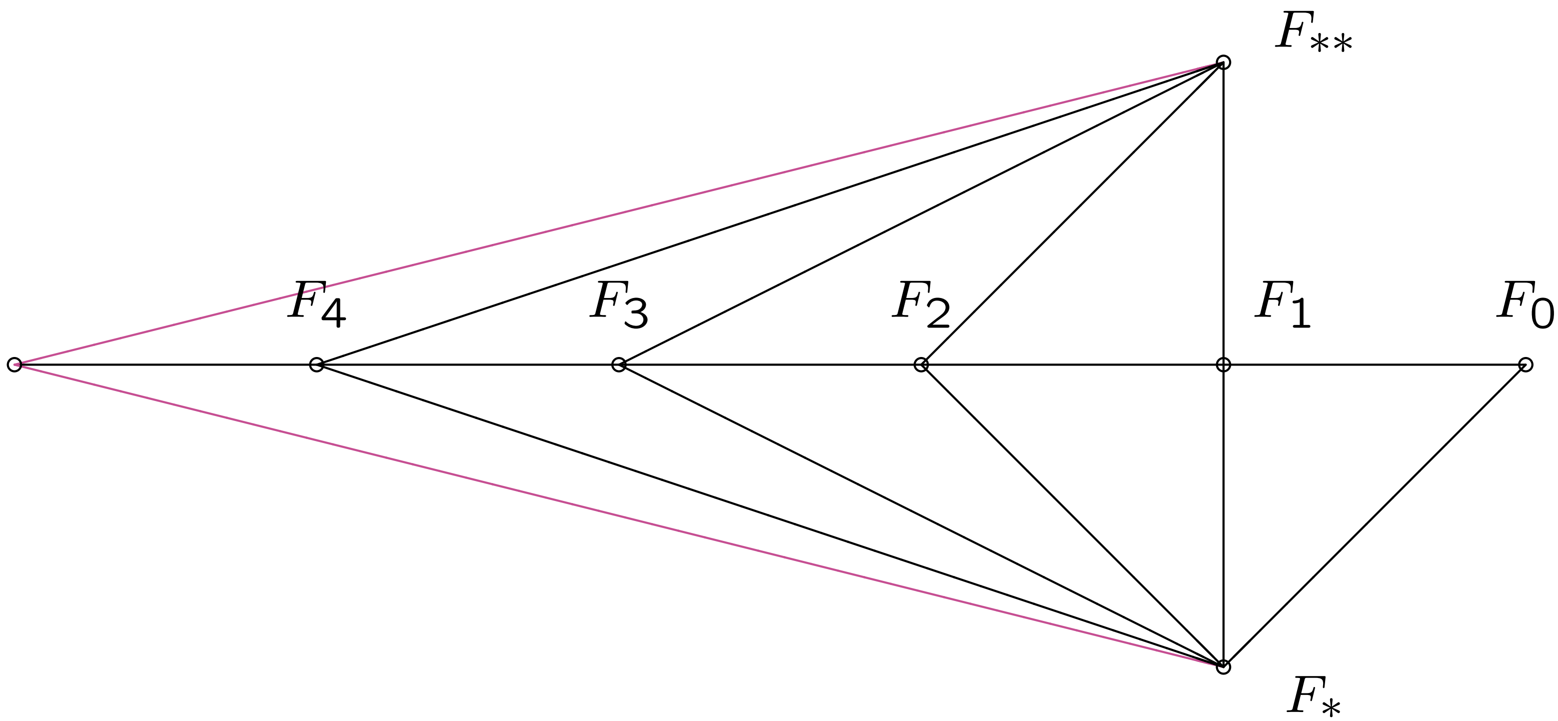
$$
\begin{aligned}
R_n \quad := \quad & \{F_* \wedge \Diamond(F_0 \wedge \neg\Diamond F_2 \wedge \neg\Diamond F_3 \wedge \neg\Diamond F_4 \wedge [\neg\Diamond_*^{n-1} \wedge \Diamond_*^{n}](F_1 \wedge \\
& \wedge\Diamond(F_2 \wedge \Diamond(F_3 \wedge \Diamond(F_4 \wedge \Diamond(F_{**} \wedge \Diamond F_1 \wedge \Diamond F_2 \wedge \Diamond F_3))))) \\
& \wedge\Diamond(F_1 \wedge \neg\Diamond F_3 \wedge \neg\Diamond F_4) \wedge \Diamond F_2 \wedge \Diamond F_3 \wedge \Diamond F_4 \wedge \neg\Diamond^2(F_0 \wedge \Diamond F_{**}) \\
& \to \Diamond\{F_4 \wedge \Diamond([\neg\Diamond_*^{n+3} \wedge \Diamond_*^{n+4}]F_0 \wedge \Diamond F_* \wedge \Diamond F_{**})\},
\end{aligned}
$$

gdzie

$$
\begin{aligned}
& \Diamond_*^0\psi := \psi, \\
& \Diamond_*^1\psi := \Diamond(\neg F_* \wedge \neg F_{**} \wedge \psi), \\
& \Diamond_*^k\psi := \Diamond(\neg F_* \wedge \neg F_{**} \wedge \Diamond_*^{k-1}\psi) \\
& \text{and} \\
& [\neg\Diamond_*^{n-1} \wedge \Diamond_*^{n}]\psi := \neg\Diamond_*^{n-1}\psi \wedge \Diamond_*^{n}\psi.
\end{aligned}
$$

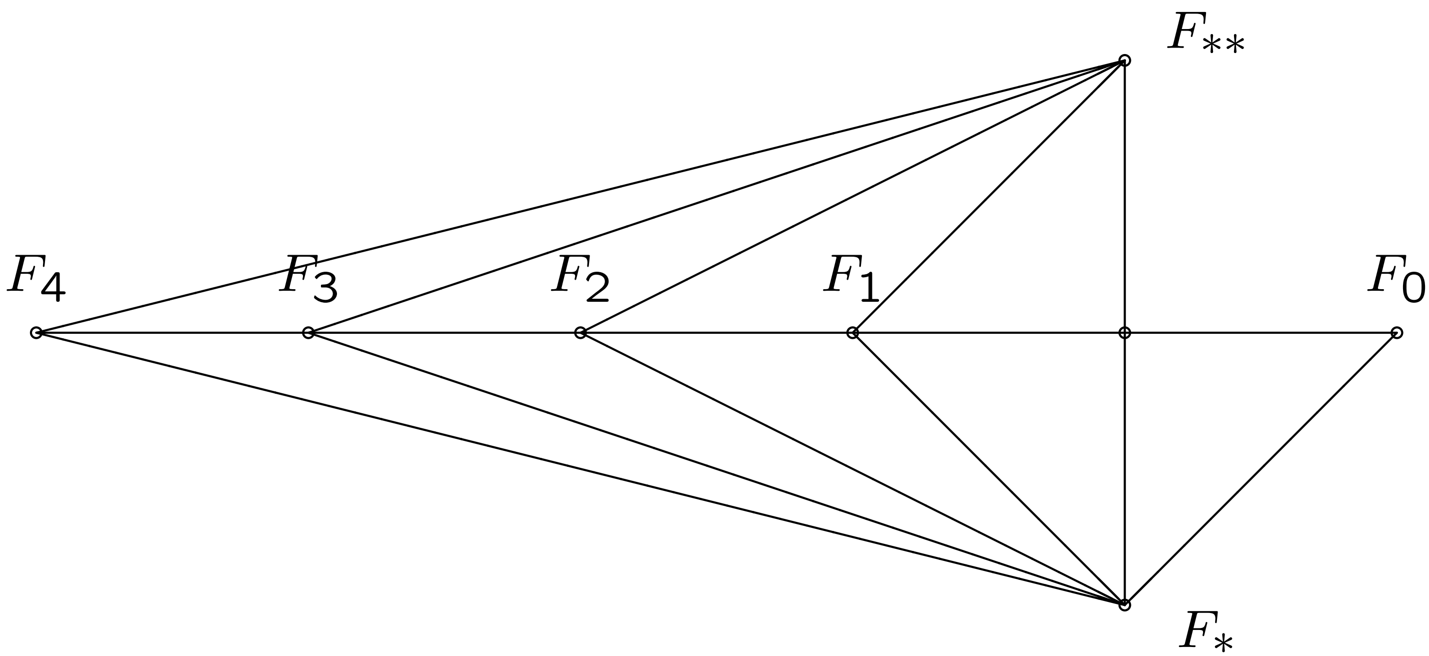
Rola formuły R_1:

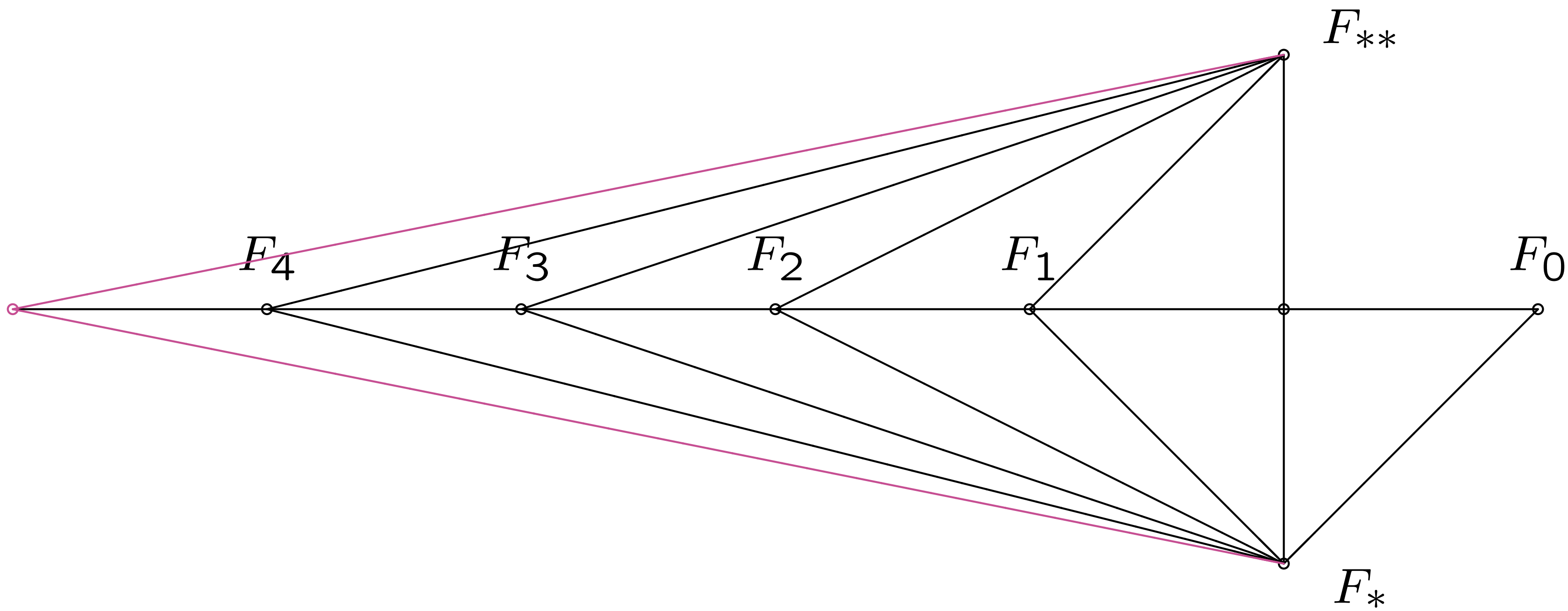




F_{**}
F_4
F_3
F_2
F_1
F_0
F_*

Rola formuły R_2:




F_{**}
F_4
F_3
F_2
F_1
F_0
F_*

L_X - rodzina rozszerzeń logiki $\mathbf{T_2}$

Definicja 10. $L_X := \mathbf{T_2} \oplus \{G_k : k \in X\} \oplus Q \oplus \{R_n : n \geq 1\}$

Lemat 11. *Niech $X, Y \subset Prim$ i $X \neq Y$. Wtedy $L_X \neq L_Y$.*

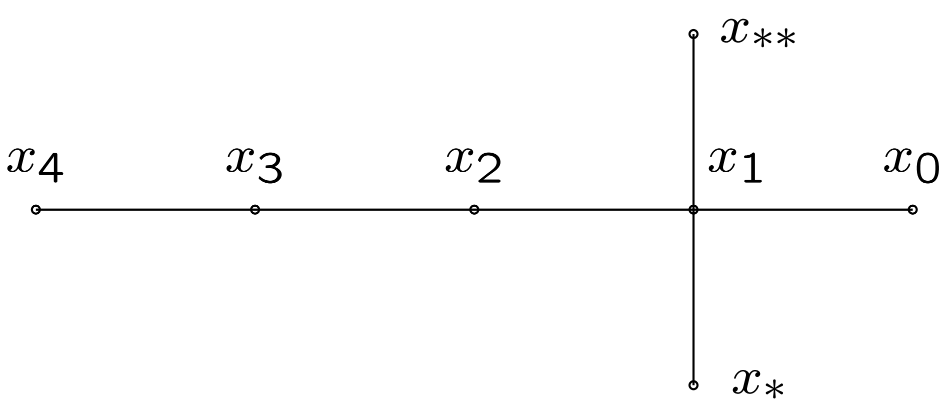
Dowód. Niech Prim := $\{n \in \mathbb{N} : n + 2$ jest pierwsza, $n \geq 5\}$. Przypuśćmy, że $X, Y \subset Prim$ i $j \in Y \setminus X$. Weźmy strukturę $\mathfrak{W}_{j+2}$. Wtedy z lematu 9 mamy $\mathfrak{W}_{j+2} \not\models G_j$, co daje $G_j \notin L_X$. Również zachodzi: $\mathfrak{W}_{j+2} \models Q$ i $\mathfrak{W}_{j+2} \models R_n$ dla każdego $n \geq 1$, gdyż poprzedniki formuł Q i R_n nie sa prawdziwe w żadnym punkcie $\mathfrak{W}_{j+2}$.

Formuła φ

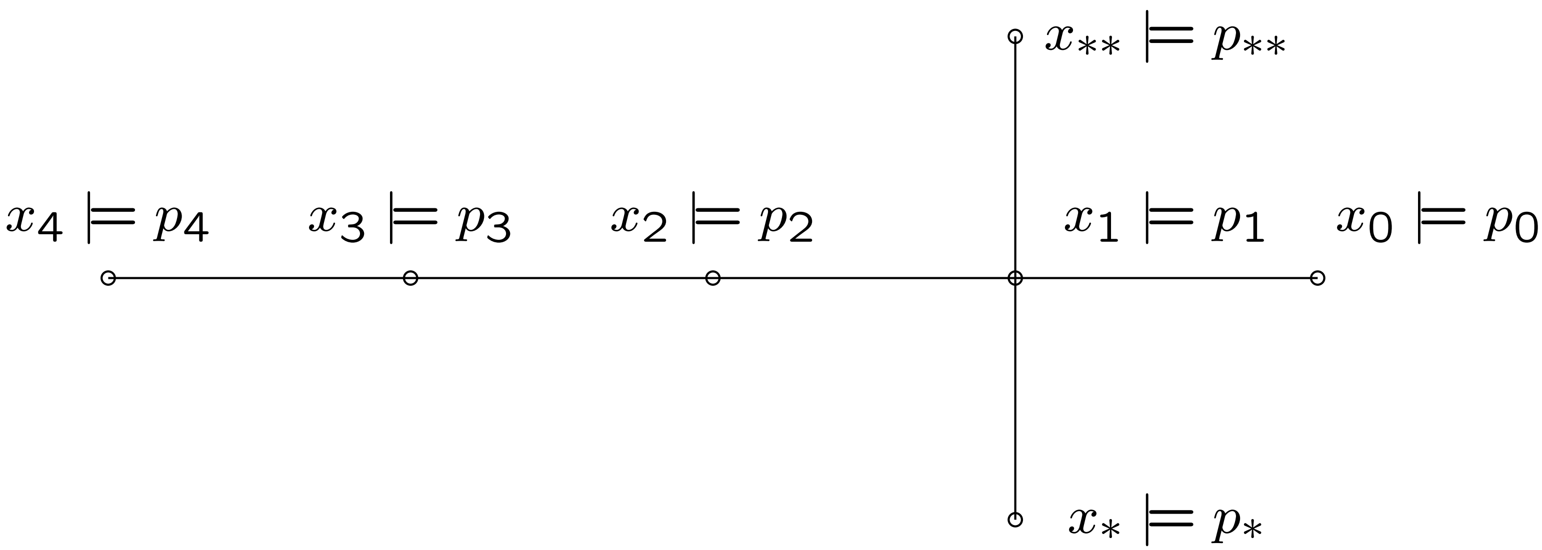
$$H_* := \neg s_0 \wedge \neg s_1 \wedge \neg s_2 \wedge s_3 \wedge \neg s_4,$$
$$H_{**} := s_0 \wedge \neg s_1 \wedge s_2 \wedge s_3 \wedge \neg s_4,$$
$$H_0 := \Box\neg s_0 \wedge \neg s_1 \wedge s_2 \wedge \neg s_3 \wedge \neg s_4,$$
$$H_1 := \neg s_0 \wedge \Box\neg s_1 \wedge s_2 \wedge \neg s_3 \wedge s_4,$$
$$H_2 := s_0 \wedge \neg s_1 \wedge s_2 \wedge \neg s_3 \wedge \neg s_4,$$
$$H_3 := s_0 \wedge s_1 \wedge s_2 \wedge s_3 \wedge \neg s_4,$$
$$H_4 := s_0 \wedge s_1 \wedge s_2 \wedge \Box s_3 \wedge s_4,$$
$$\varphi := \neg\{H_4 \wedge \Diamond[H_3 \wedge \Diamond[H_2 \wedge \Diamond(H_1 \wedge \Diamond H_0 \wedge \Diamond H_* \wedge \Diamond H_{**})]]\}.$$

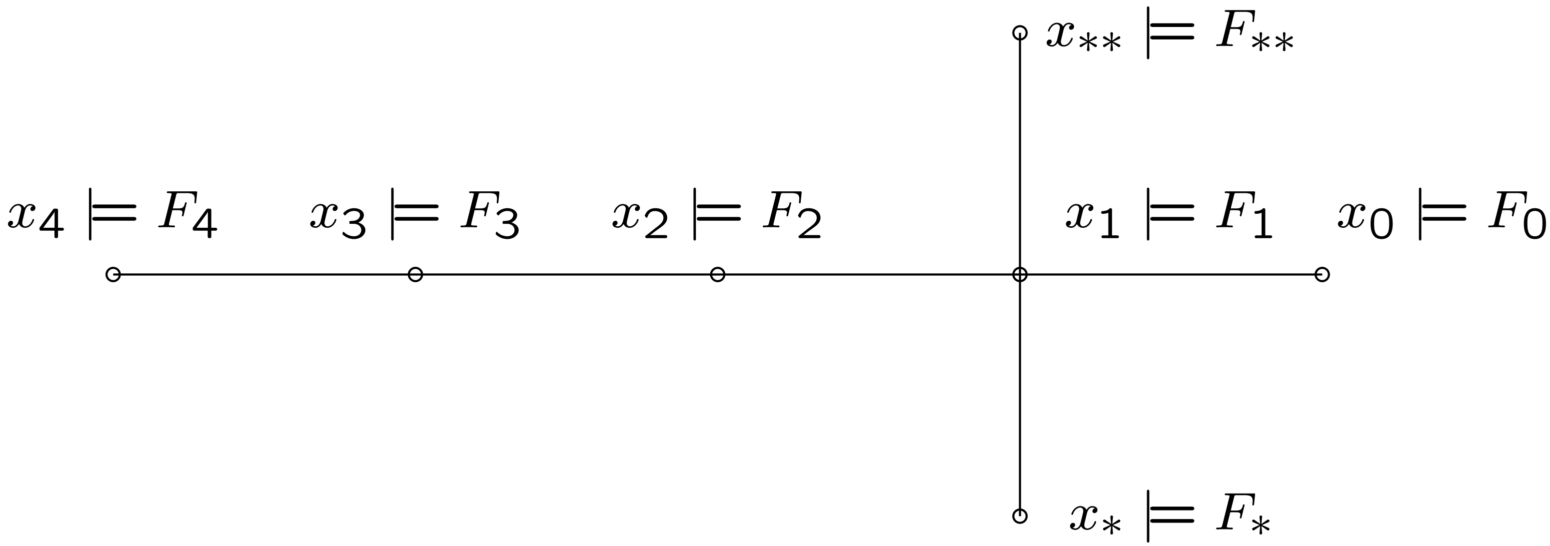
Lemat 12. *Niech $\mathfrak{F}$ jest strukturą Kripkego, taka że $\mathfrak{F} \models L_X$ dla pewnego niepustego zbioru $X \subset Prim$. Wtedy $\mathfrak{F} \models \varphi$.*

Dowód. Przypuśćmy, że istnieje struktura Kripkego $\mathfrak{F}$, taka że $\mathfrak{F} \models L_X$ i $\mathfrak{F} \not\models \varphi$ dla pewnego $X \subset Prim$. Wtedy musi istnieć co najmniej siedem punktów $x_*, x_{**}, x_0, x_1, x_2, x_3, x_4$ takich że:

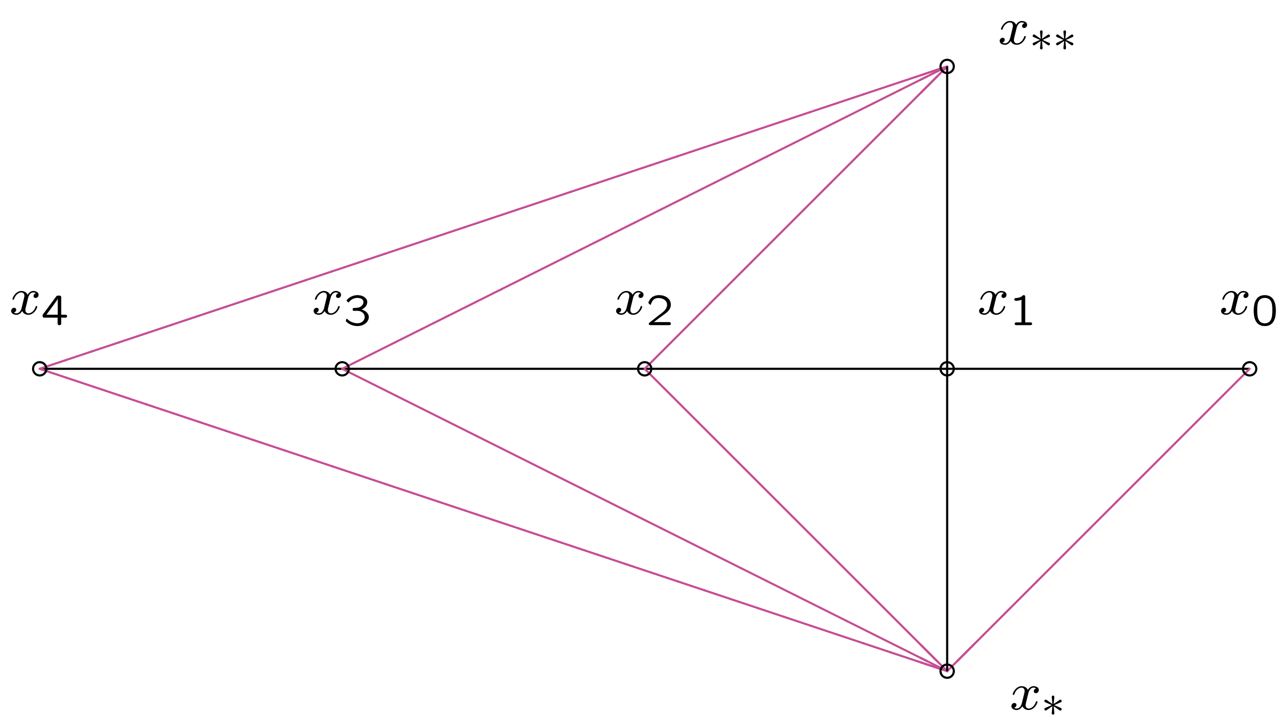


$$V(p_i) = \{x_i\},\ i = 0, 1, 2, 3, 4 \text{ i } V(p_*) = \{x_*\}.$$

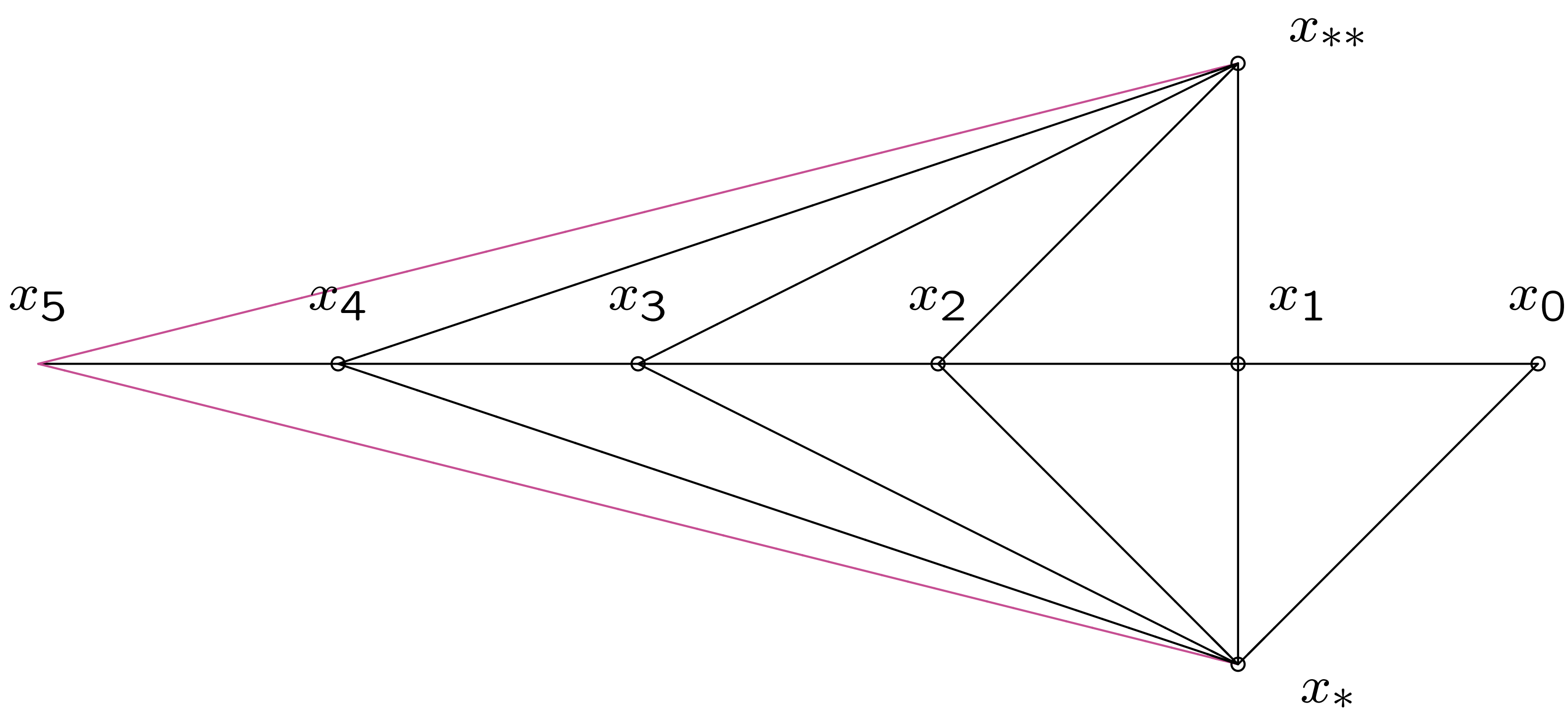




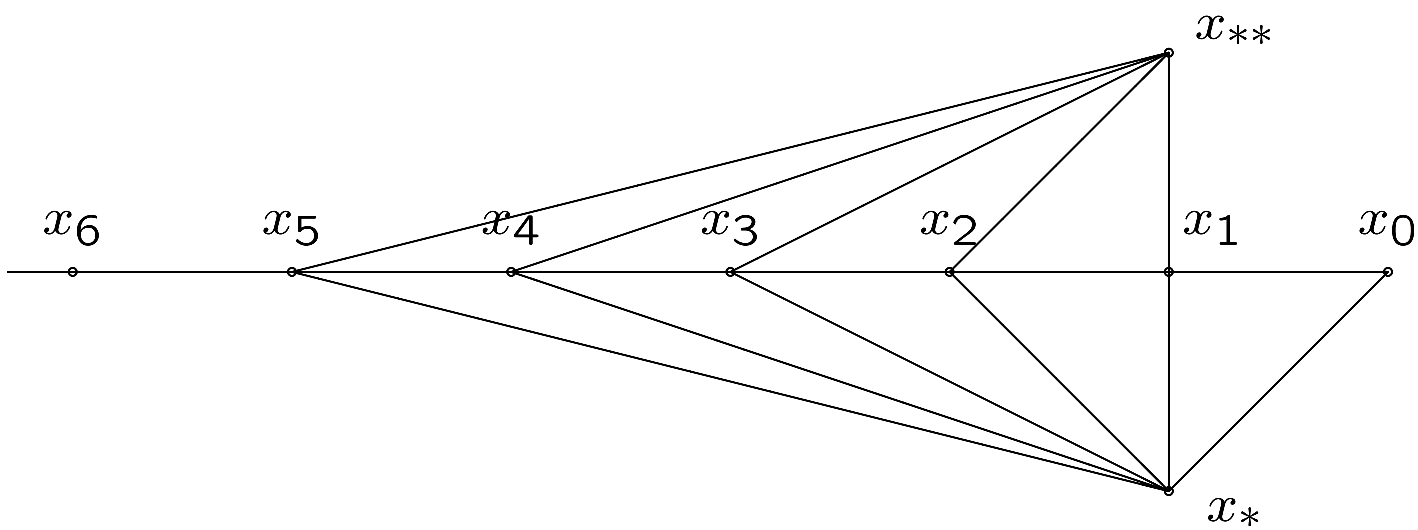
Ponieważ poprzednik Q jest prawdziwy w x_1 (zgodnie z wartościowaniem V), to następnik Q wymusi następujące połączenia we frame:



Poprzednik formuły R_1 jest prawdziwy w x_*. Stąd musi istnieć nowy punkt y taki że yRx_4 i yRx_*. Niech $y = x_5$.

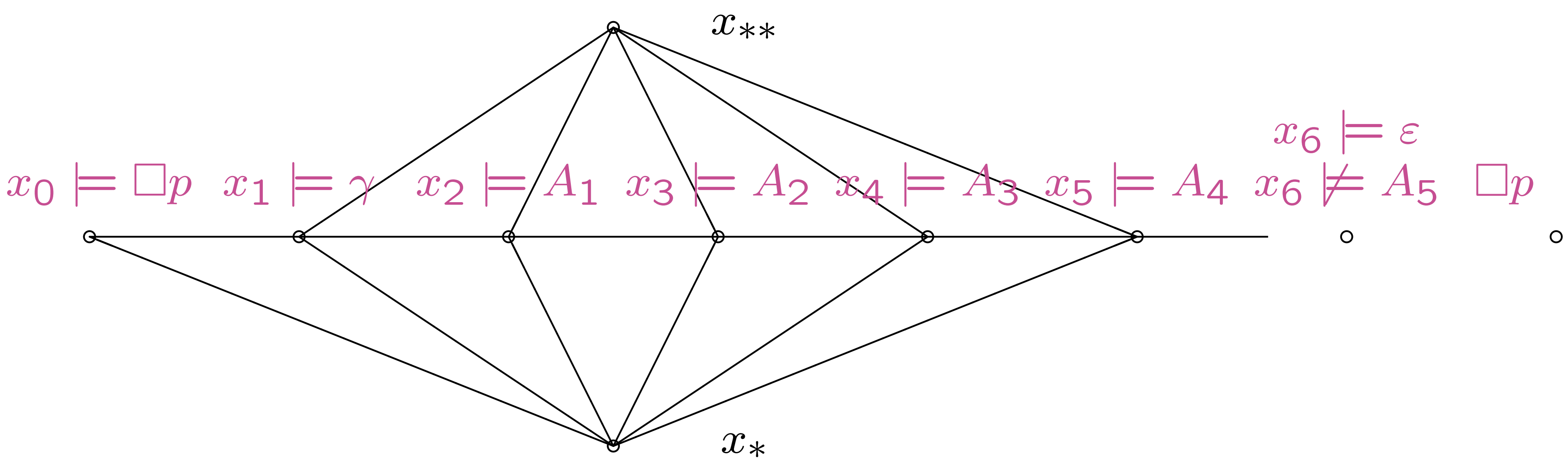


Możemy w ten sposób (odpowiednio wartościując formuły R_n) wydefiniować nieskończony ciąg punktów: x_i, $i = 0, 1, \ldots$.



Otrzymamy nieskończoną strukturę $\mathfrak{F}_\infty$. W takiej strukturze możemy obalić każdy z aksjomatów G_i.

Przykład: $\mathfrak{F}_\infty \not\models G_5$



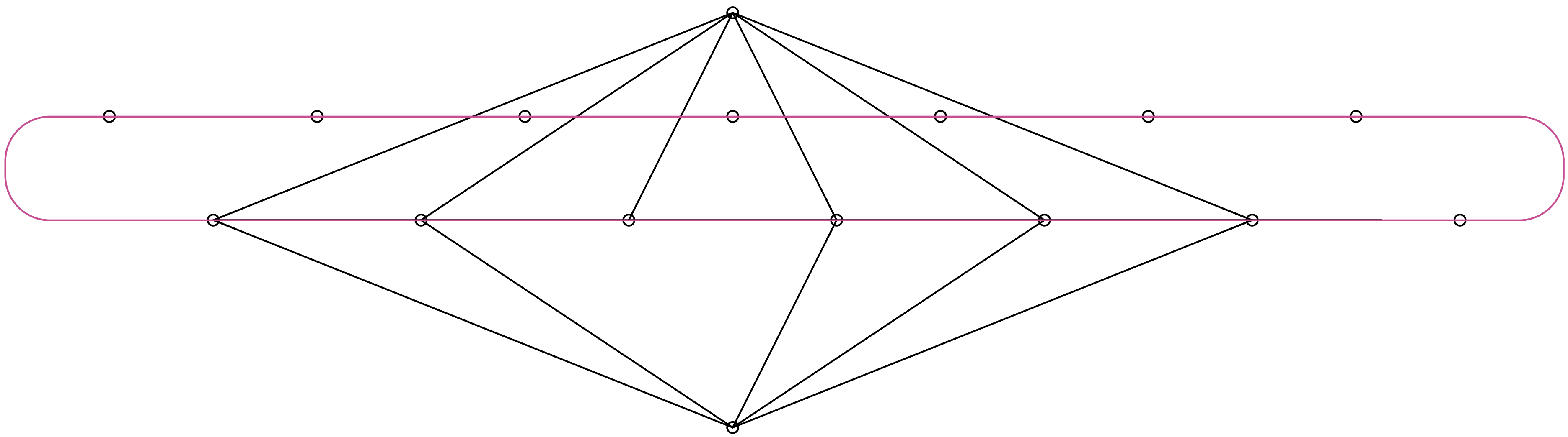
gdzie $G_5 = (\Box p \wedge \bigwedge_{i=2}^{4} C_i \wedge D_4 \wedge E) \to \Diamond^2 A_5$.

Lemat 13. *Niech $X \subset Prim$ i L_1 jest skończenie aksjomatyzowalną podlogiką L_X. Wtedy istnieje struktura Kripkego $\mathfrak{F}$ taka, że $\mathfrak{F} \models L_1$ i $\mathfrak{F} \not\models \varphi$.*

Dowód. Niech $L_1 \subset \mathbf{T_2} \oplus \{G_k : k \in X, k \leq k_1\} \oplus Q \oplus \{R_n : 1 \leq n \leq n_1\}$ dla pewnych k_1, n_1.

Niech $\mathfrak{F} = \mathfrak{S}_{m_1+2}$ gdzie

$m_1 > \max(k_1, 6n_1)$ i $m_1 \in Prim$.



Struktura sferyczna bez jednego promienia. Liczba punktów na obręczy= $m_1 + 2$ i $m_1 + 2$-liczba pierwsza.

Wtedy zachodzi: $\mathfrak{S}_{m_1+2} \models L_1$ i $\mathfrak{S}_{m_1+2} \not\models \varphi$.

Twierdzenie 14. *Istnieje kontinuum niezwartych (i niezupełnych w sensie Kripkego) logik modalnych nad logiką* $\mathbf{T_2}$.

[4] Kostrzycka Z., *On non-compact logics in NEXT(KTB)*, Math. Log. Quart. 54, No. 6, (2008), 582-589.

Pytanie: Czy istnieje niezupełna w sensie Kripkego i skończenie aksjomatyzowalna logika w $NEXT(\mathbf{KTB})$?