Lista 4, kurs wyrównawczy
Funkcje trygonometryczne, cyklometryczne, hiperboliczne

1. Wyznaczyć dziedzinę funkcji

$$a)\ f(x) = \log_2(1 - 2\cos x);\quad b)\ g(x) = \sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(x-3) - 2};$$

$$c)\ h(x) = \log(\sqrt{3} - tg\ x);\quad d)\ p(x) = \log_2[1 - \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 5x + 6)]$$

$$e)\ k(x) = \sqrt{\frac{x^2 - 3x + 1}{x+1}};\quad f)\ m(x) = \frac{1}{1 - tg\ x}.$$

2. Określić dziedziny naturalne i przeciwdziedziny (zbiory wartości) funkcji:

$$f(x) = \sqrt{\sin x},\quad g(x) = \frac{x^3 - 1}{x - 1},\quad i(x) = \log\sin(x-3) + (16 - x^2)^{\frac{1}{2}},$$
$$j(x) = \arcsin\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 3x + 2},\quad k(x) = (\arccos\log(x-3))^{\frac{1}{2}}.$$

3. Dana jest funkcja $g : (0, \pi) \to R$ określoną wzorem $g(x) = \log_2(\sin x)$. Wyznaczyć $g(B)$, gdzie $B = [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$.

4. Niech $h : [-1, 1] \to R$ będzie funkcją określoną wzorem $h(x) = \sqrt{1 - x^2}$. Wyznaczyć $h(C)$, gdzie $C = (0, 1]$.

5. Z jakich funkcji elementarnych złożone są następujące funkcje:

$$a)\ y = \sin^3 x;\quad b)\ y = \sqrt[n]{(1+x)^2};\quad c)\ y = \log tg\ x;$$

$$d)\ y = \sin^3(2x+1);\quad e)\ y = 5^{(3x+2)^2};\quad f)\ y = \sqrt[3]{\log_2(x+1) - 2}.$$

6. Znajdź wzór oraz wykres funkcji odwrotnej do danej:

$$f(x) = 2 - e^{x+1},\quad g(x) = \frac{3x - 1}{x + 5},\quad h(x) = x^2 - 2x + 2,\quad i(x) = \arcsin(x+1) - 2,$$
$$j(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{dla} \quad x \geq 0 \\ x - 1 & \text{dla} \quad x < 0 \end{cases}$$

Uwaga: dziedzinę rozważanej funkcji dobrać tak, aby funkcja odwrotna istniała.

7. Obliczyć

$a)\ arcsin\ (\frac{-1}{2});\quad b)\ arccos\ (\frac{-\sqrt{3}}{2});\quad c)\ arccos\ (\frac{-1}{2});\quad d)\ arctg\ (-\sqrt{3});$

8. Oblicz wartość wyrażenia:

a)

$$arcsin\ (-x) + arctg\ 2x + arccos\ x,$$

jeżeli $arccos\ x = \frac{2\pi}{3}$,

b)

$$2\ arccos\ x + arcsin\ 2x - arctg\ 2x,$$

jeżeli $arcsin\ x = \frac{-\pi}{6}$.

9. Sporządzić wykresy funkcji

$$a)\ p(x) = \frac{x-1}{x+1};\quad b)\ p(x) = \log_2(x-2) - 3;\quad c)\ q(x) = |\log_{\frac{1}{2}} x|;$$

$$d)\ f(x) = \begin{cases} x+1 & dla \quad x < 0 \\ x^2 + 2x + 1 & dla \quad 0 \le x < 2 \\ log_{\frac{1}{2}} x & dla \quad x \ge 2 \end{cases};$$

$$e)\ k(x) = |2^{x+2} - 3|;\quad f)\ f(x) = sgn\ (\log_2 x);\quad g)\ h(x) = sgn\ (\cos x)$$

$$h)\ g(x) = arcsin\ (x + \frac{1}{2});\quad i)\ p(x) = \frac{\pi}{2} + arccos\ x.$$

$j)\ f(x) = |x+1| - |x-1|;\quad k)\ g(x) = ||x+1| - 2|;\quad l)\ h(x) = |x^2 - 2x - 3|;$

$m)\ p(x) = 1 - \sin 2x;\quad n)\ s(x) = |\log_2 x|;\quad o)\ k(x) = 2^{|x|};\quad n)\ p)\ q(x) = 2\sin x|\ cosx|;$

$$r)\ s(x) = min\{x, \frac{1}{x}\};\quad s)\ t(x) = x - [x]$$

10. Uzasadnij prawdziwość wzorów:

$$\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2},\quad \cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2},\quad \arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2},$$

$$\sinh^2 x - \cosh^2 x = 1,\quad \sinh^2 x + \cosh^2 x = \cosh 2x,\quad 2\sinh x \cosh x = \sinh 2x.$$

11. Znaleźć okres podstawowy funkcji:

$$f(x) = \cos(3x+1),\quad g(x) = \sin^2 x,\quad h(x) = \sin x + \cos x.$$